Institut für numerische Simulation
Sommersemester 2017
André Uschmajew, Behrend Heeren

9. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe bis Mittwoch 28.6., 14Uhr.

---

1. (Fehlerabschätzung Logarithmus) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \ln(x)$ und die äquidistanten Stützstellen $x_i = 1 + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots$ Sei p das Interpolationspolynom 2. Grades mit Stützstellen x_{i-1}, x_i, x_{i+1}. Zeigen Sie: Für alle $x \in [x_i - \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}]$ gilt die Fehlerabschätzung

$$|\ln(x) - p(x)| \leq \frac{1}{8}h^3 \,.$$

2. (Dividierte Differenzen) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	1	2	4	-1	3
f_i	-3	1	2	7	-1	6

für x_0, x_1, x_2, x_3 mit Hilfe von dividierten Differenzen und der Newton-Darstellung. Wie ändert sich die Newton-Darstellung, wenn man noch die Stützpunkte x_4 bzw. x_4, x_5 hinzunimmt?

3. (Abschätzung der Lebesgue-Konstante) Sei $I = [a, b]$ ein Intervall mit Stützstellen $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$ und $h = (b-a)/n$. Zeigen Sie: Die Lebesgue-Konstante λ_n wächst exponentiell an.
Hinweis: Zeigen Sie zum Beispiel, dass $\lambda_n \geq c(1.9)^n$ für ein $c > 0$.

P. (Interpolation) Bearbeiten Sie die vierte Programmieraufgabe (Abgabe im CIP-Pool).

4. (Beispiel von Bernstein) Die Polynominterpolation mit äquidistanten Stützstellen besitzt im Allgemeinen keine guten globalen Approximationseigenschaften. Das folgende extreme Beispiel hierfür stammt von Bernstein.[1] Sei p_{2n} das Interpolationspolynom vom Grad $2n$ der Funktion $f(x) = |x|$ in den Stützstellen

$$x_i = -1 + \frac{i}{n}, \quad i = 0, \ldots, 2n.$$

Ziel der Aufgabe ist es, zu zeigen, dass $p_{2n}(x)$ für alle $x \in [-1,1] \setminus \{-1,0,1\}$ divergiert.

Für die Bearbeitung der Aufgabe empfiehlt sich folgende Matrix-Notation des Dreiecksschemas für dividierte Differenzen:

$$A = (a_{ij})_{i,j=0,\ldots,2n} \quad \text{mit} \quad a_{ij} = f[x_{i-j}, \ldots, x_i], \quad i \geq j.$$

Nach der Definition der dividierten Differenzen gilt die iterative Vorschrift

$$a_{ij} = \frac{a_{i,j-1} - a_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}, \quad i \geq j > 0,$$

und $a_{i0} = f(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 2n$.

(a) Zeigen Sie:

$$p_{2n}(x) = -x + \sum_{k=1}^{n} a_{n+k,n+k} \prod_{i=0}^{n+k-1} (x - x_i) \tag{1}$$

Hinweis: Berechnen Sie die 2. und 3. Spalte von A, also a_{i1} und a_{i2} für $i \leq 2n$, und anschließend die Diagonaleinträge a_{ii} für $i \leq n$.

(b) Bestimmen Sie die $(n+2)$-te Zeile von A, also $a_{n+1,j}$ für $j \leq n+1$.

(b*) Bestimmen Sie den Eintrag $a_{2n,2n}$.

(c) Seien $i, j < 2n$ fest und es gelte $x_{k-1} < x_k$ für alle $k > 0$. Zeigen Sie: Falls $a_{ik} > 0$ für alle $k \geq j$ und $a_{i+1,j} \leq 0$, dann folgt $a_{i+1,k} < 0$ für alle $k \geq j$. Analog gilt: Falls $a_{ik} < 0$ für alle $k \geq j$ und $a_{i+1,j} \geq 0$, dann folgt $a_{i+1,k} > 0$ für alle $k \geq j$.

(d) Berechnen Sie das Vorzeichen von a_{ij} für alle $i > n$ und $j > 2$.

(e) Zeigen Sie: Falls $x < 0$, haben alle Summanden unter dem Summenzeichen in der Darstellung (1) von $p_{2n}(x)$ dasselbe Vorzeichen.

(f) Folgern Sie, dass $\limsup_{n\to\infty} |p_{2n}(x)| = +\infty$ für jedes feste $x \in (-1, 0)$.
Hinweis: Nach (e) genügt es zu zeigen, dass $\left|a_{2n,2n} \prod_{i=0}^{2n-1}(x - x_i)\right|$ für eine Teilfolge unbeschränkt wächst. Nach (b*) ist $a_{2n,2n} = \frac{(-1)^{n-1} n^{2n}}{(2n-1)n!n!}$.

(g) Warum gilt dies auch für $x \in (0, 1)$?

---

[1] S. Bernstein, Quelques remarques sur l'interpolation, Math. Ann. 79 (1918), no. 1-2, 1-12.