Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2017
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Behrend Heeren

8. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2”

Abgabe bis Mittwoch 21.6., 14 Uhr.

---

1. (Fehlerabschätzungen für Monte-Carlo-Verfahren) Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einer abzählbaren Menge S, und seien $X_1, X_2, \dots, X_n : \Omega \to S$ unabhängige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Verteilung μ. Wir betrachten den klassischen Monte-Carlo-Schätzer

$$\hat{\theta}_n \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$$

für den Erwartungswert $\theta = E_\mu[f]$ einer Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ mit $E_\mu[|f|] < \infty$. Zeigen Sie, dass die folgenden Fehlerabschätzungen für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon, t > 0$ gelten:

a) $E[\hat{\theta}_n - \theta] \;=\; 0.$

b) $E\left[|\hat{\theta}_n - \theta|^2\right] \;=\; \frac{1}{n}\,\mathrm{Var}_\mu[f].$

c) $P\left[|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \epsilon\right] \;\leq\; \frac{1}{n\epsilon^2}\,\mathrm{Var}_\mu[f].$

d) $P\left[\hat{\theta}_n \geq \theta + \epsilon\right] \;\leq\; e^{-n\epsilon t}\, E_\mu[\exp(t(f-\theta))]^n.$

2. (Simulationsverfahren) Seien $a, b \in \mathbb{Z},\; a < b,\; p \in (0,1)$, und $\lambda > 0$.

a) Überlegen Sie sich: Ist U eine auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable, dann ist

$$X \;:=\; a + \lfloor (b-a+1)\cdot U \rfloor$$

auf $\{a, a+1, \dots, b\}$ gleichverteilt und

$$X \;:=\; \lceil \log_{1-p} U \rceil \;=\; \lceil -\log_{1/(1-p)} U \rceil$$

geometrisch verteilt mit Parameter p. Hierbei bezeichnet $\lceil x \rceil$ den oberen ganzzahligen Anteil von x.

b) Sei ν die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{Z}$ mit Gewichten

$$\nu(k) \;=\; \begin{cases} 1\big/Z, & \text{für } a \leq k \leq b,\\ \mathrm{e}^{-\lambda(k-b)}\big/Z & \text{für } k > b,\\ \mathrm{e}^{-\lambda(a-k)}\big/Z & \text{für } k < a, \end{cases}$$

wobei Z eine Normierungskonstante ist. Zeigen Sie $Z = b-a+1+\frac{2}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}$, und geben Sie einen Algorithmus an, der, ausgehend von unabhängigen Stichproben $u_n \sim \mathrm{Unif}(0,1)$, auf effiziente Weise eine Stichprobe von ν erzeugt.

c) Die Hauptschwierigkeit bei der Konstruktion eines effizienten AR-Verfahrens zur Simulation der Binomialverteilung ist das Auffinden einer leicht zu simulierenden Referenzverteilung, durch die sich die Binomialverteilung ohne zu große Verluste abschätzen läßt. Dazu kann man zum Beispiel die oberen Schranken

$$\mu_{n,p}(k) \;\leq\; \frac{2}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \qquad \text{und} \qquad \mu_{n,p}(k) \;\leq\; \mathrm{e}^{-2(k-np)^2/n}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

für die Gewichte der Binomialverteilung verwenden. Die erste Abschätzung folgt aus der Stirlingschen Formel, die zweite aus der Bernstein-Ungleichung. Erläutern Sie, wie man ausgehend von diesen Abschätzungen ein AR-Verfahren zum Generieren von Stichproben von $\mathrm{Bin}(n,p)$ konzipieren könnte.

3. (Independence Sampler) Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einer endlichen Menge S mit $\mu(x) > 0$ für alle $x \in S$. Der *Independence Sampler* ist ein spezieller Metropolis-Hastings-Algorithmus, bei dem die Vorschlagsverteilung $q(x, \cdot)$ für den nächsten Schritt der Markovkette nicht vom Ausgangspunkt x abhängt, d.h.

$$q(x,y) \;=\; \nu(y)$$

für eine feste Wahrscheinlichkeitsverteilung ν auf S mit $\nu(x) > 0$ für alle $x \in S$.

a) Geben Sie die Übergangsmatrix der entsprechenden Markovkette (X_n) an. Zeigen Sie, dass diese bzgl. des Gleichgewichts μ sowohl die Detailed Balance Bedingung als auch eine Minorisierungsbedingung mit Konstante

$$\delta \;=\; \min_{x \in S} \frac{\nu(x)}{\mu(x)}$$

erfüllt.

b) Leiten Sie eine Abschätzung für den Variationsabstand zwischen der Verteilung des Independence Samplers nach n Schritten und dem Gleichgewicht μ her.

c) Alternativ kann man in der obigen Situation eine Stichprobe von μ durch ein Acceptance-Rejection-Verfahren mit Vorschlagsverteilung ν erzeugen. Vergleichen Sie die beiden Verfahren.

4. (Unabhängigkeit) Sei S eine abzählbare Menge, $g : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und seien $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to S$ sowie $U_1, U_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Verteilungen $X_n \sim \mu$, $U_n \sim \mathrm{Unif}(0,1)$. Zeigen Sie, dass die Ereignisse

$$A_n \;:=\; \{U_n \leq g(X_n)\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

unabhängig sind. *(Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Unabhängigkeit von A_1 und A_2).*