Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2017
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Behrend Heeren

7. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe bis Mittwoch 14.6., 14 Uhr.

---

1. (Binomialmodell für Aktienkurse) In einem einfachen Finanzmarktmodell wird angenommen, dass der Kurs S_n einer Aktie an einem Tag mit Wahrscheinlichkeit p um den Faktor $u > 1$ auf den Wert $u \cdot S_n$ steigt, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ um den Faktor $d < 1$ auf den Wert $d \cdot S_n$ fällt.

Präzisieren Sie die Modellannahmen, und berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Kurses S_n nach n Tagen, wenn der Kurs bei $S_0 = 1$ startet.

2. (Exponentielle Abschätzungen)

a) Sei X eine diskrete reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass für alle $c, t \geq 0$ gilt:

$$P[X \geq c] \;\leq\; e^{-ct}\, E\left[e^{tX}\right].$$

b) Es seien nun $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P[X_i = 1] = p$ und $P[X_i = 0] = 1 - p$, $0 < p < 1$. Zeigen Sie, dass für $a, t \geq 0$ gilt:

$$P\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\Big] \;\leq\; \mathrm{e}^{-nat}\, E\big[\mathrm{e}^{tX_1}\big]^n.$$

Beweisen Sie mithilfe dieser Abschätzung die Bernstein-Ungleichung

$$P\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq p + \varepsilon\Big] \;\leq\; \mathrm{e}^{-2n\varepsilon^2} \qquad \text{für alle } \varepsilon \geq 0.$$

3. (Endliche Markovketten) Wir betrachten zeithomogene Markovketten (X_n) und (Y_n) auf $\{1, 2, 3\}$ mit Startwert $x_0 \in \{1, 2, 3\}$ und Übergangsmatrizen

$$\pi := \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \sigma := \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

a) Untersuchen Sie die Asymptotik der Verteilungen der Markovketten für $n \to \infty$.

b) Wie groß ist die asymptotische relative Häufigkeit der Besuche der Markovkette im Zustand 1 ?

4. (Stochastische Simulation II: Der Metropolis-Hastings-Algorithmus)
Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einem endlichen Zustandsraum S mit Gewichten $\mu(x) > 0$, und sei $q = (q(x,y))_{x,y\in S}$ eine irreduzible und aperiodische stochastische Matrix auf S. Für $x, y \in S$ setzen wir

$$\alpha(x,y) := \min\left(\frac{\mu(y)q(y,x)}{\mu(x)q(x,y)}, 1\right) \quad \text{falls } q(x,y) \neq 0, \quad \text{und} \quad \alpha(x,y) := 1 \quad \text{sonst.}$$

Der *Metropolis-Hastings-Algorithmus* erzeugt näherungsweise Stichproben von μ durch Simulation einer Markovkette (X_n) mit Gleichgewicht μ. Dabei wird eine Stichprobe x_{n+1} von X_{n+1} folgendermaßen aus einer Stichprobe x_n von X_n erzeugt:

- Ziehe eine Stichprobe y von der *Vorschlagsverteilung* $q(x_n, \cdot)$.
- Setze $x_{n+1} := y$ mit Wahrscheinlichkeit $\alpha(x_n, y)$, und $x_{n+1} := x_n$ sonst.

a) Zeigen Sie, dass der Algorithmus eine zeithomogene Markovkette (X_n) simuliert, und bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten $\pi(x,y)$ für $x, y \in S$.

b) Zeigen Sie, dass μ ein Gleichgewicht ist.

c) Folgern Sie, dass die Verteilung von X_n für einen beliebigen Startwert X_0 in Variationsdistanz gegen μ konvergiert.

5. (Zufällige Summen mit zufälliger Summandenzahl)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $N : \Omega \to \mathbb{Z}_+$ eine Zufallsvariable mit Erwartungswert m_1 und Varianz v_1. Zeigen Sie:

a) Für den Erwartungswert $E[Y]$ einer (diskreten) reellwertigen Zufallsvariable Y auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gilt
$$E[Y] \;=\; \sum_{P[N=k]\neq 0} E[Y|N=k] \cdot P[N=k]\;.$$
Hinweis: Die bedingte Erwartung gegeben $N = k$ ist der Erwartungswert bzgl. der bedingten Verteilung, d.h. $E[Y|N=k] \;=\; \sum_{a\in Y(\Omega)} a \cdot P[Y=a|N=k]$.

b) Sind $X_1, X_2, \ldots$ von N unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit festem Erwartungswert m_2 und Varianz v_2, dann hat die zufällige Summe
$$S_N(\omega) \;:=\; X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega)$$
den Erwartungswert $E[S_N] = m_1 m_2$ und die Varianz $\mathrm{Var}[S_N] = m_1 v_2 + m_2^2 v_1$.