Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2017
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Behrend Heeren

6. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe bis Mittwoch 31.5., 14 Uhr.

---

1. (Münzwürfe) Eine Münze zeigt „Kopf" mit Wahrscheinlichkeit p. Sei π_n die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl von „Kopf" nach n Würfen gerade ist. Zeigen Sie, dass

$$\pi_{n+1} \;=\; (1-p)\pi_n \;+\; p(1-\pi_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, und berechnen Sie π_n.

2. (Geburtenverteilung) Angenommen, die Gesamtzahl G der Geburten pro Woche in einem Krankenhaus ist Poissonverteilt mit Parameter λ. Weiterhin sei jede Geburt, unabhängig von anderen Geburten und von der Gesamtzahl der Geburten, mit Wahrscheinlichkeit p ein Junge, und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1-p$ ein Mädchen. Wir beschreiben die Anzahl der pro Woche geborenen Jungen bzw. Mädchen durch Zufallsvariablen J und M.

a) Zeigen Sie

$$P[J=j, M=m] \;=\; \frac{(\lambda p)^j \mathrm{e}^{-\lambda p}}{j!} \cdot \frac{(\lambda q)^m \mathrm{e}^{-\lambda q}}{m!}.$$

b) Folgern Sie, dass J und M unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern λp bzw. λq sind.

3. (Unabhängigkeit und Zahlentheorie) Sei $s > 1$. Die *Riemannsche Zeta–Funktion* ist definiert durch

$$\zeta(s) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Sei X auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und Verteilung

$$P[X=n] \;=\; \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}.$$

Sei E_m das Ereignis „X ist teilbar durch m". Zeigen Sie:

a) Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $P[E_m] = m^{-s}$.

b) Die Ereignisse E_p, wobei p eine Primzahl ist, sind unabhängig.

c) Berechnen Sie $P\left[\bigcap_{p \text{ Primzahl}} E_p^c\right]$, und folgern Sie die *Eulersche Formel*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \text{ Primzahl}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

d) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass X durch keine Quadratzahl außer 1 teilbar ist, gleich $1/\zeta(2s)$ ist.

*) Sei Y unabhängig von X mit derselben Verteilung, und sei H der größte gemeinsame Teiler von X und Y. Sei B_p das Ereignis, dass X und Y beide durch p teilbar sind. Was hat das Ereignis $\bigcap B_p^c$ mit H zu tun? Zeigen Sie:

$$P[H = n] = \frac{n^{-2s}}{\zeta(2s)}.$$

4. (Zufällige Polynome) Seien U, V Zufallsvariablen mit Werten in $\{-1, 1\}$, deren gemeinsame Verteilung bestimmt ist durch

$$P[U = 1] = P[U = -1] = \frac{1}{2}, \qquad \text{und}$$
$$P[V = 1 | U = 1] = P[V = -1 | U = -1] = \frac{1}{3}.$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Polynom $x^2 + Ux + V$ mindestens eine reelle Nullstelle?

b) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert der größeren Nullstelle von $x^2 + Ux + V$ gegeben es gibt mindestens eine reelle Nullstelle.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Polynom $x^2 + (U + V)x + U + V$ mindestens eine reelle Nullstelle?

Die Fachschaft Mathematik feiert am 1.6. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 29.05., Di. 30.05. und Mi 31.05. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de