Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2017
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Behrend Heeren

4. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe bis Mittwoch 17.5., 14 Uhr.

---

1. (Bandrika 1) Sie haben sich im Nationalpark von Bandrika verlaufen. Von den Besuchern im Park sind zwei Drittel Touristen. Fragen nach der Richtung werden von diesen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ richtig beantwortet. Dabei sind Antworten auf wiederholte Fragen unabhängig, auch wenn die Frage und die Person dieselben sind. Wenn man hingegen einen Bandrikaner fragt, ist die Antwort immer falsch.

a) Sie fragen eine Person, ob der Ausgang sich in Richtung Osten oder Westen befindet. Als Antwort erhalten Sie Osten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das richtig ist?

b) Sie fragen dieselbe Person nochmals und bekommen dieselbe Antwort. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, nun die richtige Antwort erhalten zu haben, $\frac{1}{2}$ beträgt.

c) Sie richten dieselbe Frage ein drittes Mal an dieselbe Person und erhalten wieder die Antwort Osten. Wie hoch ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort stimmt?

d) Ein viertes Mal wird der geduldige Passant von Ihnen gefragt, doch die Antwort ist wieder Osten. Zeigen Sie, dass die Antwort mit Wahrscheinlichkeit $\frac{27}{70}$ richtig ist.

e) Zeigen Sie für den Fall, dass die vierte Antwort Westen wäre, dass die Richtung Osten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ zutrifft.

2. (Münzwürfe)

a) Zeigen Sie, dass die Varianz einer diskreten reellwertigen Zufallsvariable X mit $E[|X|] < \infty$ durch

$$\mathrm{Var}[X] \;=\; E[X^2] - E[X]^2 \qquad\qquad \text{gegeben ist.}$$

b) Zehn Personen sitzen in einem Kreis, und jeder wirft eine faire Münze. Sei N die Anzahl der Personen, deren Münze die gleiche Seite wie die Münzen beider Nachbarn zeigt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P[N = 9]$ und $P[N = 10]$, sowie den Erwartungswert $E[N]$.

c) Berechnen Sie die Varianz $\mathrm{Var}[N]$.

3. (Zufallspermutationen)

a) Eine aufsteigende Teilfolge einer Permutation $\omega \in S_n$ ist durch eine Sequenz

$$\omega(i_1) < \omega(i_2) < \ldots < \omega(i_k)$$

mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ gegeben. Sei $N(\omega)$ die Anzahl der aufsteigenden Teilfolgen der Permutation ω. Zeigen Sie, dass für eine (gleichverteilte) Zufallspermutation aus S_n gilt:

$$E[N] \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\binom{n}{k}.$$

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der eine Zufallspermutation aus S_n erzeugt.

4. (Stochastische Simulation 1: Das direkte Verfahren) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung $U : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *reellwertige Zufallsvariable*, falls die Menge $\{U \leq c\} = \{\omega \in \Omega : U(\omega) \leq c\}$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ in der σ-Algebra $\mathcal{A}$ enthalten ist. Die Zufallsvariable heißt *gleichverteilt auf dem Intervall* $(0, 1)$, falls

$$P[U \leq c] \;=\; c \qquad \text{für alle } c \in (0,1) \text{ gilt.}$$

a) Sei $p : \mathbb{N} \to [0, 1]$ die Massenfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den natürlichen Zahlen, und $F : \mathbb{Z}_+ \to [0, 1]$ die durch

$$F(n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} p(i)$$

definierte *kumulative Verteilungsfunktion.* Zeigen Sie: Ist $U : \Omega \to (0, 1)$ gleichverteilt, dann wird durch

$$X = n \;:\Leftrightarrow\; F(n-1) < U \leq F(n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

eine Zufallsvariable mit Massenfunktion p definiert.

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der aus einer auf $(0, 1)$ gleichverteilten Zufallsvariable eine Zufallsvariable mit Massenfunktion p erzeugt.

c) Bestimmen Sie die mittlere Laufzeit des Algorithmus. Wie aufwändig ist es, mit dem Algorithmus eine Poisson(λ)-verteilte Zufallsvariable zu simulieren ?