Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2017
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Behrend Heeren

3. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe bis Mittwoch 10.5., 14 Uhr.

Geben Sie bei den stochastischen Modellierungsaufgaben den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum und die verwendeten Zufallsvariablen genau an, und leiten Sie die Aussagen aus den Modellannahmen her !

1. (Zufallsstichproben mit und ohne Zurücklegen)

a) Eine Prüfung besteht aus 12 Fragen, die mit *ja* oder *nein* zu beantworten sind. Sie gilt bei mindestens 8 richtigen Antworten als bestanden.

   i) Ein Student kreuzt auf gut Gück die Antworten an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er die Prüfung?

   ii) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn er 2 Fragen mit Sicherheit beantworten kann und nur den Rest zufällig ankreuzt?

   iii) Falls er gar nichts weiß, wäre es dann für ihn günstiger, zufällig 6-mal *ja* und 6-mal *nein* anzukreuzen, vorausgesetzt, dass für 6 Fragen die richtige Antwort *ja* lautet?

b) Geben Sie die Massenfunktionen der Binomialverteilung mit Parametern n und p und der hypergeometrischen Verteilung mit Parametern n, m und r an (Bezeichnungen wie in der Vorlesung). Zeigen Sie: Für $m \to \infty$ und $r \to \infty$ mit $p = \frac{r}{m}$ konstant konvergiert die hypergeometrische Verteilung gegen die Binomialverteilung mit Parametern n und p. Interpretieren Sie diese Aussage.

2. (Geburten) Im 18. Jahrhundert wurden in London in 82 aufeinander folgenden Jahren mehr Jungen als Mädchen geboren. Da Jungen und Mädchen mit ungefähr (aber nicht genau) gleicher Wahrscheinlichkeit geboren werden, scheint das ein sehr unwahrscheinliches Ereignis zu sein, das der göttlichen Vorsehung zugeschrieben wurde. Ist das wirklich so? Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass jede Geburt unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.485$ ein Mädchen ergibt (und vernachlässigen Sie die Möglichkeit von Zwillingen usw.).

a) Zeigen Sie: die Wahrscheinlichkeit, dass in $2n$ Geburten mehr Mädchen als Jungen geboren werden ist nicht größer als

$$\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \frac{1-p}{1-2p} \,.$$

b) Angenommen, in 82 aufeinander folgenden Jahren werden jedes Jahr 20.000 Kinder geboren. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass in jedem Jahr mehr Jungen als Mädchen geboren werden ist mindestens 0.99.

Hinweis: Sie können die Stirlingsche Formel benutzen:

$$1 \le \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} \le e^{1/(12n)} .$$

3. (Erwartungswert von positiven Zufallsvariablen mit ganzzahligen Werten)

a) Sei T eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{Z}_+$. Zeigen Sie, dass

$$E[T] = \sum_{k=1}^{\infty} P[T \ge k].$$

b) Berechnen Sie, wieviele Würfe im Schnitt nötig sind, bis beim Würfeln mit einem fairen Würfel zum ersten Mal eine 6 fällt.

4. (Random Walk) Sei P die Gleichverteilung auf $\Omega = \{-1,+1\}^N$ und $X_i(\omega) = \omega_i$. Wir interpretieren

$$S_0 := 0 \quad \text{und} \quad S_n := X_1 + \ldots + X_n, \qquad n = 1, \ldots, N,$$

als zufällige Irrfahrt eines Teilchens auf $\mathbb{Z}$ mit Start in 0. Für $\lambda \in \mathbb{N}$ sei

$$T_\lambda = \min\{n > 0 \mid S_n = \lambda\}$$

der Zeitpunkt des ersten Besuchs in λ. Zeigen Sie, dass

a) die Verteilung von S_n gegeben ist durch

$$P[S_n = k] = \begin{cases} 0, & \text{falls } n+k \text{ ungerade oder } |k| > n, \\ 2^{-n}\binom{n}{(n+k)/2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) das Reflexionsprinzip gilt, d.h. für jedes $c > 0$ erhält man:

$$P[S_n = \lambda - c,\, T_\lambda \le n] = P[S_n = \lambda + c].$$

c) die Verteilung von T_λ gegeben ist durch:

$$P[T_\lambda \le n] = P[S_n \ge \lambda] + P[S_n > \lambda].$$

P. (Würfeln II) Bearbeiten Sie die zweite Programmieraufgabe (Abgabe im CIP-Pool).