Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2017
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Behrend Heeren

2. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe bis Mittwoch 3.5., 14 Uhr, in den Postfächern gegenüber der Bibliothek. Bitte heften Sie die komplette Abgabe zusammen, und versehen diese mit Ihren eigenen Namen und dem Namen des Tutors. Die maximale Gruppengröße pro Abgabe ist 3.

---

1. (Münzwürfe) Eine faire Münze wird n mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim n-ten Wurf

a) Kopf zum ersten mal eintritt,

b) die Anzahl von Kopf und Zahl gleich ist,

c) genau zweimal Kopf eingetreten ist,

d) mindestens zweimal Kopf eingetreten ist.

2. (Bonferroni's Ungleichung) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$P\Big[\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big] \;\geq\; \sum_{i=1}^{k} P[A_i] - \sum_{1 \leq i < j \leq k} P[A_i \cap A_j].$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Fälle $k = 2$ und $k = 3$.

b) In jeder Packung Corn Flakes befindet sich je eines von insgesamt n verschiedenen Bildern von Fußballspielern, darunter auch 11 Bilder von Spielern aus der Nationalmannschaft. Wer nun die Bilder aller 11 Nationalspieler gesammelt hat, gewinnt eine Reise zur Weltmeisterschaft. Um die Reise auf jeden Fall zu gewinnen, kauft Fred Feuerstein $3n$ Packungen.

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich die gewünschten Bilder zu erhalten, zwischen $1 - 11 \cdot (1 - \frac{1}{n})^{3n}$ und $1 - 11 \cdot (1 - \frac{1}{n})^{3n} + 55 \cdot (1 - \frac{2}{n})^{3n}$ liegt. Welchen Wert haben diese Schranken ungefähr für große n?

3. (Wartezeiten und Runs)

a) Bestimmen Sie die Verteilung der Wartezeit T auf die erste 6 bei wiederholtem Würfeln mit einem fairen Würfel.

b) In manchen Anwendungen möchte man testen, ob eine Bitfolge

$$\omega \;=\; (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$$

,,rein zufällig" zustande kam oder nicht. Eine Kenngröße, mit der man quantifizieren kann, ob die Nullen und Einsen sehr gleichmäßig verteilt sind oder eher in wenigen Gruppen (runs) vorkommen, ist die Zahl

$$V(\omega) \;:=\; |\{i \in \{2, \dots, n\} \mid x_i \neq x_{i-1}\}|.$$

Beispielsweise ist $V\big((1,1,1,1,0,0,0,0)\big) = 1$ und $V\big((1,0,1,0,1,0,1,0)\big) = 7$.

Sei P die Gleichverteilung auf $\{0,1\}^n$. Zeigen Sie, dass

$$P[V = k] \;=\; 2^{-(n-1)} \binom{n-1}{k}.$$

c) Bestimmen Sie $V(\omega)$ für die fünf Folgen auf der Homepage der Vorlesung (Zufall oder kein Zufall ?, siehe `wt.iam.uni-bonn.de/index.php?id=1015`) und für eine von Ihnen selbst erstellte ,,möglichst zufällige" Folge. Wie können Sie beurteilen, ob die Folgen hinsichtlich der Runs echten Zufallsfolgen ähnlich sind?

4. (σ-Algebren)

a) Geben Sie alle auf der Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$ möglichen σ-Algebren an.

b) Finden Sie jeweils die kleinste σ-Algebra auf Ω, welche $\mathcal{M}$ enthält:

i) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\},\ \mathcal{M} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$.

ii) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ \mathcal{M} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$.

iii) $\Omega = \{0, 1\}^4,\ \mathcal{M} = \{\{X_1 = 1\}, \{X_2 = 1\}\}$, wobei $X_i(\omega) := \omega_i$.

iv) $\Omega = [0, 1],\ \mathcal{M} = \{\{x\} : x \in [0, 1]\}$.

5. (Zerlegungssatz für Summen - optional) Sei A eine abzählbare Menge, und seien $p(\omega) \geq 0$, $\omega \in A$, nicht-negative reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass für jede disjunkte Zerlegung $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gilt

$$\sum_{\omega \in A} p(\omega) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_i} p(\omega).$$

Help Desk AlMa II: Dienstags und donnerstags 10-13 Uhr, Raum N1.002.
Daniel Angele, s6daange@uni-bonn.de