Institut für numerische Simulation
Sommersemester 2017
André Uschmajew, Behrend Heeren

14. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Keine Abgabe.

---

1. (Householdermatrizen)

Sei $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass U als Produkt von Householdermatrizen

$$H(v) = I - 2vv^T\,, \quad \|v\|_2 = 1\,,$$

geschrieben werden kann.

2. (QR-Zerlegung)

Lösen Sie mittels des QR-Verfahrens das Ausgleichsproblem

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 11 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix} \right\|^2 \to \text{min!}$$

Geben Sie die Minimalstelle (x, y) und das Quadrat des Residuums (den Wert der obigen quadrierten Norm an der Minimalstelle) an.

3. (QR-Zerlegung und Gram-Schmidt)

Gegegen seien n linear unabhängige Vektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie das klassische und das numerisch stabilere modifizierte Verfahren von Gram-Schmidt zur Erzeugung von n orthonormalen Vektoren $q_1, \dots, q_n$, die denselben Raum aufspannen wie $a_1, \dots, a_n$:

Klassisches Gram-Schmidt

for $k = 1, \dots, n$ **do**
  $z_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} q_i(q_i^T a_k)$;
  $q_k = z_k / \|z_k\|_2$;
end

Modifiziertes Gram-Schmidt

$a_k^{(1)} = a_k$, $k = 1, \dots, n$ **for**
$k = 1, \dots, n$ **do**
  $q_k = a_k^{(k)} / \|a_k^{(k)}\|_2$;
  for $l = k+1, \dots, n$ **do**
    $a_l^{(k+1)} = a_l^{(k)} - (q_k^T a_l^{(k)}) q_k$
  end
end

Zeigen Sie, dass beide Verfahren die gleichen Vektoren q_k liefern.

Bemerkung: Überlegen Sie sich, dass man diese Verfahren als QR-Zerlegung $A = QR$, angewendet auf die Spalten von $A = [a_1|\dots|a_n]$ interpretieren kann.