Institut für numerische Simulation
Sommersemester 2017
André Uschmajew, Behrend Heeren

13. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe bis Mittwoch 26.7., 14Uhr.

---

1. (Globale Konvergenz des Newton-Verfahrens für konvexe Funktionen)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, sowie $f'(x) > 0$ und $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b)$. Zeigen Sie: Dann konvergiert das Newton-Verfahren mit Startwert $x_0 = b$ monoton gegen die einzige Nullstelle x^* von f in $[a,b]$.

2. (Verfahren mit kubischer Konvergenz)

Sei $\alpha > 0$. Zur Berechnung von $\sqrt{\alpha}$ sei das Iterationsverfahren

$$x_{k+1} = Ax_k + \frac{B}{x_k} + \frac{C}{x_k^3}$$

gegeben. Bestimmen Sie Koeffizienten $A, B, C \in \mathbb{R}$ so, dass das Verfahren für alle Startwerte $x_0 > \sqrt{\alpha}$ *kubisch* gegen $\sqrt{\alpha}$ konvergiert, d.h., es soll gelten $\|x_{k+1} - \sqrt{\alpha}\| \leq c\|x_k - \sqrt{\alpha}\|^3$ für $c > 0$ und k groß genug.

3. (Modifiziertes Newton-Verfahren)

a) Es sei x^* ein Fixpunkt der stetig differenzierbaren Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und es gelte $\|D\Phi(x^*)\| < 1$ in einer gewissen induzierten Matrixnorm. Zeigen Sie: Es gibt ein $\delta > 0$, so dass die Fixpunktiteration $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}$ für jeden Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x^{(0)} - x^*\| < \delta$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ Q-linear gegen x^* konvergiert.

b) Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $DF(x^*)$ sei invertierbar. Zeigen Sie, es gibt eine Umgebung U von x^*, sodass für jeden Startwert $x^{(0)} \in U$ das modifizierte Newton-Verfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(DF(x^{(0)})\right)^{-1} F(x^{(k)})$$

wohldefiniert ist und lokal linear gegen x^* konvergiert.
Hinweis: Nach 4(a) ist die Abbildung $X \mapsto X^{-1}$ auf der offenen Menge $GL(n)$ der invertierbaren $n \times n$ Matrizen stetig.

4. (Das Verfahren von Schulz)

a) Sei $GL(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : X \text{ invertierbar}\}$ und $G : GL(n) \to GL(n)$ mit $f(X) = X^{-1}$. Zeigen Sie, dass G stetig differenzierbar ist, indem Sie für jedes $X \in GL(n)$ den linearen Operator $DG(X) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ bestimmen. Ist $DG(X)$ invertierbar? Wenn ja, wie lautet der inverse Operator?

b) Sei $A \in GL(n)$. Das Verfahren von Schulz ist dient der iterativen Berechnung von A^{-1} und ist gegeben durch

$$X_{k+1} = X_k + X_k(1 - AX_k)\,, \quad X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Folge lokal quadratisch gegen A^{-1} konvergiert.
Hinweis: Betrachten Sie das Newton-Verfahren für die Funktion $F(X) = X^{-1} - A$.

P. (Newton-Verfahren) Bearbeiten Sie die sechste Programmieraufgabe (Abgabe im CIP-Pool bis **Dienstag, 25.7.2017**).