Institut für numerische Simulation
Sommersemester 2017
André Uschmajew, Behrend Heeren

12. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe bis Mittwoch 19.7., 14Uhr.

---

1. (Konvergenz des Gauß-Seidel-Verfahrens)
Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix. Zeigen Sie: Gibt es eine Konstante $\vartheta < 1$, so dass

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \leq \vartheta |a_{ii}|\,, \quad i = 1, \dots, n\,,$$

so gilt für die Fehlerfortpflanzungsmatrix des Gauß-Seidel-Verfahrens

$$\left\| I - (L+D)^{-1} A \right\|_\infty \leq \vartheta\,.$$

2. (Kondition)
Gegegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ -99 & 101 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Konditionszahlen $\kappa_\infty(A)$ und $\kappa_\infty(B)$.

b) Für die Vektoren

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta b = \begin{pmatrix} \delta \\ \delta \end{pmatrix}, \quad \Delta \hat{b} = \begin{pmatrix} \delta \\ -\delta \end{pmatrix}$$

mit einer kleinen reellen Zahl $\delta > 0$ löse man die Gleichungssystem

$$Ax = b\,, \quad A(x + \Delta x) = b + \Delta b\,, \quad A(x + \Delta \hat{x}) = b + \Delta \hat{b}\,.$$

Man vergleiche die jeweiligen relativen Fehler $\|\Delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$ und $\|\Delta \hat{x}\|_\infty / \|x\|_\infty$ mit der allgemeinen Fehlerabschätzung $\|\Delta x\|/\|x\| \leq \kappa(A) \|\Delta b\|/\|b\|$.

3. (Approximation der Inversen)
Für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Näherung für A^{-1} und $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ eine beliebige submultiplikative Matrixnorm. Man zeige:

$$\begin{aligned} \frac{\|A^{-1} - B\|}{\|A^{-1}\|} &\leq \min\{\|AB - I\|,\, \|BA - I\|\}\,, \\ \|BA - I\| &\leq \kappa(A)\,\|AB - I\| \leq \kappa^2(A)\,\|BA - I\|\,. \end{aligned}$$

Zu Testzwecken betrachte man die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 9999 & 9998 \\ 10000 & 9999 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9999.9999 & -9997.0001 \\ -10001 & 9998 \end{pmatrix},$$

und berechne die Matrizen $BA - I$ und $AB - I$.

4. (Konvergenz des CG-Verfahrens)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix.
a) Sei x^* die Lösung $Ax^* = b$ und $x^{(k)}$ die k-te Iterierte des CG-Verfahrens. Zeigen Sie:

$$\|x^{(k)} - x^*\|_A \leq \inf_{p\in\Pi_k, p(0)=1} \|p(A)\|_A \cdot \|x^*\|_A\,,$$

wobei Π_k den Raum aller Polynome vom Grad $\leq k$ bezeichnet.
Hinweis: Für ein Polynom $p(t) = \sum_{l=0}^{k} a_l t^l$ mit $t \in \mathbb{R}$ ist $p(A) := \sum_{l=0}^{k} a_l A^l$.

b) Seien $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ die Eigenwerte von A, sei p ein Polynom. Zeigen Sie:

$$\|p(A)\|_A = \max_{i=1,\ldots,n} |p(\lambda_i)|\,.$$

c) Die Matrix A habe $m \leq n$ verschiedene Eigenwerte. Zeigen Sie, dass das CG-Verfahren die Lösung in höchstens m Schritten berechnet.