Institut für numerische Simulation
Sommersemester 2017
André Uschmajew, Behrend Heeren

11. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe bis Mittwoch 12.7., 14Uhr.

---

1. (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und $\Phi : M \to \mathbb{R}^d$ eine Abbildung mit $\Phi(M) \subseteq M$.

a) Zeigen Sie: Ist für ein $m \in \mathbb{N}$ die m-fache Verkettung $\Phi^m(x) := (\Phi \circ \ldots \circ \Phi)(x)$ eine Kontraktion, so besitzt Φ genau einen Fixpunkt $x^* \in M$ und die Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$$

konvergiert für jeden Startwert $x^{(0)} \in M$ gegen x^*.

b) Sei $M = [0,1]^2$ und

$$\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{-y} \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Bzgl. der Maximumsnorm ist $\Phi : M \to M$ keine Kontraktion, $\Phi \circ \Phi$ hingegen schon.
Hinweis: Warum reicht es zu zeigen, dass $\|D(\Phi \circ \Phi)(x,y)\|_\infty < 1$ für alle $(x,y) \in M$?

2. (Zeilensummen- und Spaltensummennorm)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Zeigen Sie:

a) Die durch die Maximumsnorm $\|.\|_\infty$ induzierte Matrixnorm ist gegeben durch

$$||A||_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\,.$$

b) Die durch die l_1-Norm $\|.\|_1$ induzierte Matrixnorm ist gegeben durch

$$||A||_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|\,.$$

3. (Spektralradius)
Mit $\rho(T)$ seid der Spektralradius einer Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichnet.
a) Zeigen Sie:

$$\rho(T) < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \quad \text{(Neumannsche Reihe)}.$$

Hinweis: Wie üblich bezeichnet $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ den Grenzwert $\lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} T^k$.

b) Sei $\rho(T) > 1$. Zeigen Sie, dass es dann Vektoren $f, x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ gibt, für welche die lineare Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + f$$

divergiert.

Hinweis: Setzen Sie nicht voraus, dass es einen eindeutigen Fixpunkt gibt (sonst folgt die Behauptung aus einem Satz der Vorlesung).

4. (Eigenwerte der Finite–Differenzen–Diskretisierung)
Die Steifigkeitsmatrix für Finite Differenzen auf dem Interval $I = [0,1]$ mit $n+1$ Stützstellen $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$ und Gitterweite $h = 1/n$ ist gegeben durch

$$L_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}.$$

Zeigen Sie, dass für $k = 1, \ldots, n-1$ die Vektoren $v^k \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit Komponenten

$$v_i^k = \sqrt{2}\,\sin(k\pi hi)\,, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

Eigenvektoren von L_h zu den Eigenwerten $\lambda_k = 4h^{-2}\,\sin^2(\frac{k\pi h}{2})$ sind.

Hinweis: Benutzen Sie $1 - \cos(a) = 2\sin^2(a/2)$ und weitere Additionstheoreme.

P. (Iterative Löser) Bearbeiten Sie die fünfte Programmieraufgabe (Abgabe im CIP-Pool).