Institut für numerische Simulation
Sommersemester 2017
André Uschmajew, Behrend Heeren

10. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe bis Mittwoch 5.7., 14Uhr.

---

1. (Gleichmäßige Polynomapproximation mit Interpolationsbedingungen)

Seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sowie Stützstellen $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ vorgegeben. Zeigen Sie, dass zu jedem $\epsilon > 0$ existiert eine Polynom p (der Grad ist nicht vorgeschrieben), für welches gilt:

$$\|f - p\|_\infty < \epsilon \quad \text{und} \quad p(x_i) = f(x_i) \text{ für } i = 0, \dots, n.$$

Hinweis: Es ist $\|f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$. Verwenden Sie den Weierstraßschen Approximationssatz: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Polynom p mit $\|f - p\|_\infty < \epsilon$.

2. (Summierte Mittelpunktregel) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit Stammfunktion F, d.h. $F' = f$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Seien $x, h \in \mathbb{R}$ mit $[x-h, x+h] \subset [a,b]$. Dann gilt:

$$F(x + \frac{h}{2}) - F(x - \frac{h}{2}) = hf(x) + \frac{h^3}{24} \frac{f''(\theta_+) + f''(\theta_-)}{2}$$

für gewisse Zwischenstellen $\theta_-, \theta_+ \in [a,b]$.

b) Sei $l \in \mathbb{N}$, $l > 0$, sowie $\theta_1, \dots, \theta_l \in [a,b]$. Dann existiert ein $\theta \in [a,b]$, so dass gilt:

$$f''(\theta) = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{l} f''(\theta_k)\,.$$

c) Seien $z_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N$ und $h = (b-a)/N$. Dann ist

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - hf\left(\frac{z_i + z_{i+1}}{2}\right) = \frac{h^3}{24} f''(\theta_i)$$

für geeignete $\theta_i \in [a,b]$, $i = 1, \dots, N-1$.

d) Sei $M(h) = h \sum_{i=0}^{N-1} f(\frac{z_i + z_{i+1}}{2})$ die summierte Mittelpunktregel. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - M(h) = (b-a)\frac{h^2}{24} f''(\theta)\,,$$

wobei $\theta \in [a,b]$ geeignet zu wählen ist.

3. (Exakte Quadraturformel für kubische Polynome) Bestimmen Sie $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ so, dass die Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t \to a\,g(x) + b\,g(y)$$

für alle Polynome dritten Grades exakt ist.

4. (Orthogonalität der Chebychev-Polynome) Zeigen Sie: Die Chebychev-Polynome $(T_n)_n$ bilden ein Orthogonalsystem bzgl. des Skalarprodukts

$$(u, v) = \int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,v(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$