

1. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2“

Abgabe bis Mittwoch 26.4., 14 Uhr, in den Postfächern gegenüber der Bibliothek. Bitte heften Sie die komplette Abgabe zusammen, und versehen diese mit Ihren eigenen Namen und dem Namen des Tutors.

Die maximale Gruppengröße pro Abgabe ist 3.

1. (Gleichverteilung)

- Sei Ω eine endliche Menge. Definiere die Gleichverteilung P auf Ω und zeige durch Überprüfen der Axiome, dass P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.
- In einer Urne befinden sich N Kugeln, von denen K rot sind. Wir ziehen n Kugeln ohne Zurücklegen. Beschreibe dieses Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe k rote Kugeln enthält, ist

$$\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k} / \binom{N}{n}.$$

2. (Kolmogorovsche Axiome)

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \in \mathcal{A}$.

- Es gelte $P[A] = \frac{3}{4}$ und $P[B] = \frac{1}{3}$. Zeige: $\frac{1}{12} \leq P[A \cap B] \leq \frac{1}{3}$ und demonstriere anhand von Beispielen, dass beide Extremfälle eintreten können.
- Zeige, dass $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$ ist.
- Ist $A \cup B = \Omega$, dann gilt $P[A \cap B] = P[A]P[B] - P[A^c]P[B^c]$.

3. (Geburtstagsparadox) In einer Klasse sind n Schüler.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n , dass mindestens zwei Schüler am selben Tag Geburtstag haben? Berechne p_{22} und p_{23} explizit. Dabei sei vereinfachend angenommen, dass kein Schüler am 29. Februar geboren ist und alle anderen Geburtstage gleich wahrscheinlich sind.
- Zeige unter Verwendung der Ungleichung $1 - x \leq \exp(-x)$, dass

$$p_n \geq 1 - \exp(-n(n-1)/730).$$

Welche untere Schranke ergibt sich für p_{30} ?

4. (Ereignisse als Mengen)

Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf Ω , und seien $A, B, A_n \in \mathcal{A}$ Ereignisse. Was bedeuten (mit Begründung) die folgenden Ereignisse anschaulich?

$$\text{a) } A \cap B \quad \text{b) } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{c) } \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Sei nun speziell $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \{-1, +1\}\}$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildungen $S_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$S_n(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \omega = (x_1, x_2, \dots) \in \Omega.$$

Was bedeuten die den folgenden Mengen zugeordneten Ereignisse anschaulich?

$$\text{d) } S_n^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \quad \text{e) } \bigcap_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{Q} \\ \varepsilon > 0}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} S_m^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$$

5. (Gerüchte)

In einer Stadt mit $n + 1$ Einwohnern erzählt eine Person einer zweiten ein Gerücht, diese ihrerseits erzählt es erneut weiter, usw. Bei jedem Schritt wird der „Empfänger“ zufällig unter den n möglichen Personen mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt (- gelegentlich erzählt also auch jemand das Gerücht derselben Person, von der er es gehört hat). Das Gerücht wird auf diese Weise r mal weiter erzählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

- es nicht zum Urheber zurückkommt,
- es keiner Person zweimal erzählt wird.
- Setze im Ergebnis von a) insbesondere $r = n + 1$, und berechne den Limes für $n \rightarrow \infty$.

P1. (Würfeln I) Die mit „P“ gekennzeichneten Übungsaufgaben werden Programmieraufgaben sein. Programmiersprache ist Python, als Programmierumgebung verwenden wir Jupyter Notebooks (ehemals IPython Notebooks).

- Installieren Sie Python wie auf der Vorlesungshomepage beschrieben, und laden Sie sich die Einführung in Jupyter Notebooks und das Beispiel Notebook herunter.
- Bearbeiten Sie die erste Programmieraufgabe auf der Homepage.

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt im CIP-Pool bei den CIP-Pool-Tutoren (NICHT bei den Tutoren der Übungen!). In der ersten Semesterwoche wird der CIP-Pool wöchentliche Zeitfenster bekannt geben, die für die ALMa reserviert sind. Sie sollten diese Zeitfenster nutzen, um sich ca. alle zwei Wochen einen Termin zu organisieren und die bearbeiteten Programmieraufgaben den CIP-Pool-Tutoren zu präsentieren. Für die Bearbeitung der Programmieraufgaben sind die gleichen Gruppen wie zur Bearbeitung der Übungsaufgaben vorgesehen.