Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2017
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Behrend Heeren

0. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Diese Übungsaufgaben werden in den Tutorien in der ersten bzw. zweiten Woche besprochen (ab Donnerstag 20.4.). Eine Abgabe der Lösungen ist nicht erforderlich, aber Sie sollten vor den Tutorien selbst versuchen, die Aufgaben zu lösen.

---

1. (Kombinatorik 1) Sieben Kinder fahren mit dem Zug zu einem Vergnügungspark.

a) Auf der Hinfahrt sind in einem Zugwagen noch genau sieben Plätze frei. Auf wieviele Weisen können sich die Kinder auf die freien Plätze verteilen?

b) Für die erste Fahrt mit der Achterbahn im Park ist noch ein Wagen mit vier Plätzen frei. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die Besetzung dieser vier Plätze?

c) Betrachten Sie Teil b) unter einem anderen Blickwinkel: Wieviele Möglichkeiten gibt es, drei Kinder zu bestimmen, die nicht bei der ersten Fahrt dabei sind?

d) Auf der Rückfahrt sind in einem Zugwagen genau 16 Plätze frei. Auf wieviele Weisen können sich die Kinder auf die freien Plätze verteilen?

2. (Kombinatorik 2) Es werden $6n$ faire Würfel geworfen. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass jede Augenzahl genau n mal vorkommt, beträgt

$$\frac{(6n)!}{(n!)^6}\left(\frac{1}{6}\right)^{6n}.$$

3. (De Méré Paradox) Welches der folgenden beiden Ereignisse ist wahrscheinlicher:

a) mit 4 Würfen eines fairen Würfels mindestens einmal die 6 zu erhalten,

b) mit 24 Würfen von zwei fairen Würfeln mindestens einmal eine doppelte 6 zu bekommen?

Das Problem stammt von Chevalier de Méré, der mit seinen Spielproblemen und deren Lösungen durch Pascal in die Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie eingegangen ist.

4. (Würfeln) Ein fairer Würfel wird drei mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Augensumme 9 bzw. 10? Für beide Ereignisse gibt es genau 6 Möglichkeiten:

$$9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3$$
$$10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+4+1 = 5+3+2 = 4+4+2 = 4+3+3\,,$$

und doch sind die Ereignisse nicht gleich wahrscheinlich!

5. (Münzwürfe 1) Ein Mann besitzt fünf Münzen, zwei davon haben Kopf auf beiden Seiten, eine hat Zahl auf beiden Seiten, und zwei sind normale Münzen.

a) Der Mann wählt mit geschlossenen Augen zufällig eine Münze und wirft sie. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Unterseite Kopf?

b) Er öffnet die Augen und sieht, dass die Oberseite Kopf zeigt. Was ist nun die Wahrscheinlichkeit für Kopf auf der Unterseite?

c) Er schließt die Augen wieder und wirft die Münze erneut. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Unterseite Kopf?

d) Nachdem er die Augen geöffnet hat, sieht er, dass die Oberseite wieder Kopf zeigt. Wie beeinflusst das die Wahrscheinlichkeit für Kopf auf der Unterseite?

e) Der Mann legt die Münze beiseite, nimmt zufällig eine andere seiner Münzen, und wirft sie. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt sie Kopf?

6. (Tennis) Ein Tennisturnier für 2^n Spieler wird nach einem KO-System mit n Runden organisiert. Hierbei ist die letzte Runde das Finale. Zwei Spieler werden zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben sie sich a) in der ersten oder zweiten Runde, b) im Finale oder Halbfinale, oder c) überhaupt nicht getroffen?

7. (Münzwürfe 2) Maria wirft eine Münze $n+1$ mal, und Johannes n mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Maria öfter Zahl als Johannes ?

Literatur zur ersten Teil der Vorlesung:

- Krengel: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*
- Kersting, Wakolbinger: *Elementare Stochastik*
- Henze: *Stochastik für Einsteiger*
- Chung: *Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse*
- Dehling, Haupt: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*
- Grimmett, Stirzaker: *Probability and Random Processes*
- Föllmer, Künsch: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Skript ETH Zürich, ftp://ftp.stat.math.ethz.ch/Teaching/kuensch/skript-einf.pdf
- Häggström: *Finite Markov Chains and Stochastic Algorithms*
- Müller-Gronbach, Novak, Ritter: *Monte Carlo-Algorithmen*