IAM/INS
Sommersemester 2017
Andreas Eberle, André Uschmajew

universitätbonn

2. Klausur zu „Algorithmische Mathematik II"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält 4 Aufgaben, die Sie alle bearbeiten sollten.
- Pro Aufgabe können maximal 25 Punkte und 3 Zusatzpunkte erreicht werden.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Abgabe bis spätestens 12.00 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4			**Summe**	**Note**
Punkte								

1. (Unabhängige Zufallsvariablen)

a) Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ diskrete reellwertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Definieren Sie die Begriffe *Unabhängigkeit*, *paarweise Unabhängigkeit*, sowie *Unkorreliertheit* von $X_1, \ldots, X_n$. [*5 Pkt.*]

b) Zeigen Sie anhand von Beispielen:

   (i) Aus der Unkorreliertheit zweier Zufallsvariablen folgt nicht deren Unabhängigkeit. [*4 Pkt.*]

   (ii) Aus paarweiser Unabhängigkeit folgt nicht Unabhängigkeit. [*3 Pkt.*]

c) Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Massenfunktion $p(k) = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

   (i) $P[X \leq k]$ für $k \in \mathbb{N}$. [*2 Pkt.*]

   (ii) $P[\min(X, Y) \leq k]$ für $k \in \mathbb{N}$. [*3 Pkt.*]

   (iii) $P[X = Y]$. [*2 Pkt.*]

   (iv) $P[X < Y]$. [*2 Pkt.*]

d) Sei u eine Stichprobe von einer auf $(0, 1)$ gleichverteilten Zufallsvariable U. Geben Sie ein Verfahren an (mit Beweis), dass daraus

   (i) eine Stichprobe x von einer Zufallsvariable mit Massenfunktion $p(k) = 2^{-k}$ erzeugt, [*3 Pkt.*]

   (ii) zwei Stichproben x, y von unabhängigen Zufallsvariablen mit Massenfunktion p erzeugt. [*4 Pkt.*]

2. (Bedingte Wahrscheinlichkeiten)

Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einer abzählbaren Menge S.

a) Definieren Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mu[A|B]$ eines Ereignisses $A \subseteq S$ gegeben $B \subseteq S$ mit $\mu[B] > 0$. *[2 Pkt.]*

b) Sei H_i, $i \in I$, eine abzählbare Kollektion von disjunkten Ereignissen mit $\bigcup H_i = S$. Formulieren und beweisen Sie die Bayessche Formel in diesem Kontext. *[6 Pkt.]*

c) In einer Tasche befinden sich 3 Münzen. Eine ist eine faire Münze, die anderen beiden sind gezinkt. Wenn die Münzen geworfen werden, erscheint ,,Kopf" mit Wahrscheinlichkeit 1/2, 3/5 bzw. 1/10. Angenommen, Sie entnehmen zufällig eine der Münzen aus der Tasche, und werfen diese drei Mal.

   (i) Formulieren Sie ein mathematisches Modell mit Präzisierung des Wahrscheinlichkeitsraums, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P[\text{“}ZZK''\,]$ (d.h. bei den ersten beiden Würfen fällt Zahl, und danach fällt Kopf). *[5 Pkt.]*

   (ii) Angenommen, die drei Münzwürfe ergeben “ZZK”. Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die faire Münze gezogen haben ? *[2 Pkt.]*

d) In jeder Runde eines Glücksspiels werden sowohl eine faire Münze als auch ein fairer Würfel geworfen. Zeigt die Münze “Kopf”, dann geht das Spiel eine Runde weiter, bei “Zahl” endet das Spiel mit der jetzigen Runde. Der Spieler gewinnt am Ende die Summe der in allen Runden gewürfelten Augenzahlen.

   (i) Welche Verteilung hat die Zufallsvariable T, die die Anzahl der Runden beschreibt ? (mit Beweis !) *[4 Pkt.]*

   (ii) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable G, die den Gewinn des Spielers beschreibt. *[5 Pkt.]*

   (iii) Berechnen Sie die Varianz von G. *[4 Pkt.]*

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-k} = 2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)2^{-k} = 4.$$

3. (Interpolation und Quadratur)

a) Berechnen Sie zu den Stützstellen

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	2
f_i	2	1	1	1

das Interpolationspolynom dritten Grades in der Newtonschen Darstellung mit Hilfe des Dreiecksschemas für dividierte Differenzen. *[8 Pkt.]*

b) Seien $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ und $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Stützstellen. Zeigen Sie, dass für die dividierte Differenz $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = 1$ gilt. *[4 Pkt.]*

c) Es sei p_α das Polynom ersten Grades, welches die Funktion

$$f_\alpha \colon (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^2 - x}$$

in den Stützstellen $\{-2, -1\}$ interpoliert.

(i) Geben Sie eine möglichst genaue Abschätzung für den maximalen Fehler

$$\max_{x \in [-2,2]} |f_\alpha(x) - p_\alpha(x)|$$

an. Gehen Sie dabei von den aus der Vorlesung bekannten Fehlerschranken für Polynominterpolation aus. *[4 Pkt.]*

(ii) Bestimmen Sie alle Werte von α, für welche die Fehlerschranke den Wert 2^{-5} nicht überschreitet. *[2 Pkt.]*

d) (i) Bestimmen Sie ein Polynom p zweiten Grades, welches bezüglich des gewichteten Skalarprodukts $(f, g)_w := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)x^2 \,\mathrm{d}x$ orthogonal zu allen Polynomen höchstens ersten Grades ist. *[4 Pkt.]*

(ii) Bestimmen Sie nun $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ und $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Gauß-Quadratur

$$\int_{-1}^{1} g(x) \cdot x^2 \,\mathrm{d}x \quad \to \quad ag(x_1) + bg(x_2)$$

für Polynome dritten Grades exakt ist. *[6 Pkt.]*

4. (Matrixnormen und Iterationsverfahren)

a) Betrachten Sie die Matrizen

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche $\|T_\alpha\|_2 < 1$ in der Spektralnorm gilt. *[7 Pkt.]*

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonaldominant, d.h. $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ für $i = 1, \ldots, n$.

(i) Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm. Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung

$$\|Ax\|_\infty \geq c\|x\|_\infty\,, \quad c := \min_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left(|a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \right).$$

Hinweis: Sei $\|x\|_\infty = |x_i|$. Dann gilt $\|Ax\|_\infty \geq |(Ax)_i|$. *[4 Pkt.]*

(ii) Folgern Sie, dass A invertierbar ist und der Abschätzung

$$\kappa_\infty(A) \leq \frac{\|A\|_\infty}{c}\,.$$

genügt. Hierbei ist $\kappa_\infty(A)$ die Konditionszahl bezüglich der Maximumsnorm. *[4 Pkt.]*

c) Seien $(x, y) = x^T y$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$. Zur Minimierung der Funktion

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) - (x, b)$$

betrachte man ein Abstiegsverfahren $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)}$, $p^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha^{(k)} \in \mathbb{R}$.

(i) Bestimmen Sie zu gegebenem x und $p \neq 0$ eine Formel für die optimale Schrittweite α_*, welche die Funktion $\alpha \mapsto \phi(x + \alpha p)$ minimiert. *[3 Pkt.]*

(ii) Bestimmen Sie explizit die optimalen Schrittweiten $\alpha_i^{(k)}$ zu den Suchrichtungen $p_i^{(k)} = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (i-te Einheitsvektoren). *[2 Pkt.]*

(iii) Betrachten Sie nun das Verfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} p_i^{(k)}$$

mit den Schrittweiten $\alpha_i^{(k)}$ und Suchrichtungen $p_i^{(k)} = e_i$ aus (ii). Zeigen Sie, dass dieses Verfahren identisch ist mit dem Jacobi-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. *[2 Pkt.]*

d) Seien $D \subset \mathbb{R}$ offen und $f : D \to D$ stetig differenzierbar mit $f'(x) \neq 1$ für alle $x \in D$. Weiterhin besitze f einen Fixpunkt $x^* \in D$. Zeigen Sie, dass eine der beiden Fixpunktiterationen

$$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad y_{k+1} = f^{-1}(y_k)\,,$$

für alle Startwerte in einer gewissen Umgebung von x^* gegen x^* konvergiert. *[6 Pkt.]*