IAM/INS
Sommersemester 2017
Andreas Eberle / André Uschmajew,
Matthias Erbar / Behrend Heeren

Klausur „Algorithmische Mathematik II"

Musterlösung

---

1. (Zufallsvariablen und ihre Verteilung) Sie $\lambda \in (0,\infty)$. Die Poisson(λ)-Verteilung ist die eindeutige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{Z}_+$ mit Gewichten

$$\mu(k) \;=\; \frac{1}{Z(\lambda)}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2,\dots,$$

wobei $Z(\lambda)$ eine positive Konstante ist. Sei N eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definierte Poisson(λ)-verteilte Zufallsvariable.

a) Bestimmen Sie $Z(\lambda)$. *[3 Pkt.]*

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[N]$. *[3 Pkt.]*

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $E[\beta^N]$ für $\beta \in (0,\infty)$. *[3 Pkt.]*

d) Man beobachtet pro Jahr im Mittel ein Erdbeben der Mindeststärke 8 auf der Richter-Skala. Wir nehmen an, dass die Anzahl solcher Erdbeben pro Jahr approximativ Poisson-verteilt ist, und die entsprechenden Anzahlen in unterschiedlichen Jahren unabhängig sind.

   (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es im nächsten Jahr mehr als ein solches Erdbeben ? *[3 Pkt.]*

   (ii) Welche Verteilung besitzt die Anzahl derjenigen unter den nächsten 100 Jahren, in denen mehr als zwei solcher Erdbeben stattfinden ? *[4 Pkt.]*

   (iii) Wieviele Jahre mit mehr als zwei solcher Erdbeben kann man in diesem Zeitraum erwarten ? *[3 Pkt.]*

e) Formulieren und beweisen Sie den Poissonschen Grenzwertsatz. *[5 Pkt.]*

f) Sei M eine von N unabhängige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, die Poisson-verteilt mit Parameter $\mu \in (0,\infty)$ ist. Zeigen Sie, dass $M+N$ eine Zufallsvariable ist, die Poisson($\lambda+\mu$)-verteilt ist. *[4 Pkt.]*

Lösung:

a) Da die Gewichte μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definieren, muss gelten, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \mu(k) = 1$ und daher

$$Z(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} .$$

b) Der Erwartungswert von N ist gegeben durch

$$E[N] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda .$$

c) Der Erwartungswert von β^N ist gegeben durch

$$E[\beta^N] = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta\lambda)^k}{k!} e^{-\beta\lambda} e^{\beta\lambda} e^{-\lambda} = e^{\lambda(\beta-1)} .$$

d) Es sei N_i die Anzahl der Erdbeben mit Stärke mindestens 8 im Jahr $2017 + i$. Wir nehmen an, dass $N_1, N_2, \ldots$ unabhängig und Poisson(λ)-verteilt mit $\lambda = 1$ sind.

i) Es gilt:

$$\begin{aligned} &P[\text{mehr als ein Erdbeben der Stärke mindestens 8 in 2018}] \\ &= P[N_1 \geq 2] = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}(1+\lambda) = 1 - 2/e . \end{aligned}$$

ii) Es sei X die Anzahl Jahre unter den nächsten 100 mit mehr als zwei solcher Beben. Dann gilt

$$X = \sum_{i=1}^{100} \mathbf{1}_{N_i \geq 3} .$$

Die Zufallsvariablen $Y_i = \mathbf{1}_{N_i \geq 3}$ sind unabhängig und Bernoulli verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = p(\lambda) := P[N_i \geq 3] = 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda + \lambda^2/2) = 1 - 5/(2e)$. Damit ist X Binomial verteilt, genauer $X \sim \mathrm{bin}_{100,p(\lambda)}$.

iii) Gesucht ist der Erwartungswert von X. Es gilt:

$$E[X] = E\Big[\sum_{i=1}^{100} \mathbf{1}_{N_i \geq 3}\Big] = \sum_{i=1}^{100} E[\mathbf{1}_{N_i \geq 3}] = 100 P[N_i \geq 3] = 100 p(\lambda) .$$

Alternativ kann direkt verwendet werden, dass der Erwartungswert einer $\mathrm{bin}_{n,p}$-verteilten ZV gegeben ist durch np.

e) **Satz:** (Poissonscher Grenzwertsatz): Sei $\lambda \in (0, \infty)$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{bin}_{n, \frac{\lambda}{n}}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Beweis: Für $k = 0, 1, \ldots$ und $n \to \infty$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{bin}_{n, \frac{\lambda}{n}}(k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}}_{\to 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} . \end{aligned}$$

f) Es gilt:

$$\begin{aligned} P[M + N = k] &= \sum_{j=0}^{k} P[M = j, N = k - j] \overset{unabh.}{=} \sum_{j=0}^{k} P[M = j] P[N = k - j] \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{\mu^j}{j!} e^{-\mu} \frac{\lambda^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda} = \sum_{j=0}^{k} \mu^j \lambda^{k-j} \frac{k!}{j!(k-j)!} \frac{1}{k!} e^{-(\lambda+\mu)} \\ &= \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} e^{-(\lambda+\mu)} . \end{aligned}$$

Daher ist $M + N$ Poisson$(\lambda + \mu)$-verteilt.

2. (Varianz, Kovarianz und Gesetz der großen Zahlen)

a) Definieren Sie die Begriffe Varianz und Kovarianz für diskrete reellwertige Zufallsvariablen. Geben Sie alle dabei verwendeten Annahmen explizit an. Die Definition des Erwartungswerts kann vorausgesetzt werden. *[4 Pkt.]*

b) Formulieren und beweisen Sie die Čebyšev-Ungleichung. *[5 Pkt.]*

c) Sei $v \in (0, \infty)$, und seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$\mathrm{Var}[X_i] \leq v \quad \text{und} \quad \mathrm{Cov}[X_i, X_j] = 0 \quad \text{für } |i-j| \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ gilt:

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \leq 3nv, \tag{1}$$

$$P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - E[X_i])\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{3v}{n\epsilon^2} \tag{2}$$

[7 Pkt.]

d) Wir betrachten nun $n+1$ unabhängige Würfe eines fairen Würfels. Sei A_i das Ereignis, dass die Augenzahl Y_{i+1} im $(i+1)$-ten Wurf größer ist als die Augenzahl Y_i im i-ten Wurf.

(i) Formulieren Sie ein Modell auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p = P[A_i]$. *[4 Pkt.]*

(ii) Zeigen Sie, dass die Ereignisse A_i und A_j für $|i-j| \geq 2$ unabhängig sind. *[2 Pkt.]*

(iii) Sei S_n die Anzahl der Ereignisse A_i, die für $i = 1, \ldots, n$ eintreten. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von S_n. *[6 Pkt.]*

Lösung:

a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein WRaum und $X : \Omega \to S$ eine ZV mit $S \subset \mathbb{R}$ abzählbar. Ferner gelte $E[|X|] < \infty$. Dann ist die Varianz von X definiert durch

$$Var[X] := E[(X - E[X])^2] .$$

Sei $Y : \Omega \to S$ eine weitere ZV und sei nun $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, d.h. es gelte $E[|X|^2], E[|Y|^2] < \infty$. Dann ist die Kovarianz von X und Y definiert durch

$$Cov[X, Y] := E\big[(X - E[X])(Y - E[Y])\big] .$$

b) **Chebycheff-Ungleichung:** Für $c > 0$ gilt:

$$P[|X - E[X]| \geq c] \leq \frac{1}{c^2} Var[X] .$$

Beweis: Setze $A = \{|X - E[X]| \geq c\}$ und bemerke, dass $1 \leq c^{-2}(X - E[X])^2$ auf A. Damit folgt:

$$\begin{aligned} P[|X - E[X]| \geq c] &= E[\mathbf{1}_A] \leq E[\mathbf{1}_A \cdot \frac{1}{c^2}(X - E[X])^2] \\ &\leq E[\frac{1}{c^2}(X - E[X])^2] = \frac{1}{c^2} Var[X] . \end{aligned}$$

c) Es gilt:

$$\begin{aligned} Var\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] &= \sum_{i=1}^n Var[X_i] + \sum_{i \neq j} Cov[X_i, X_j] \leq nv + 2\sum_{i=1}^{n-1} Cov[X_i, X_{i+1}] \\ &\leq nv + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{Var[X_i] Var[X_{i+1}]} \leq nv + 2(n-1)v \leq 3nv . \end{aligned}$$

In der zweiten Ungleichung wurde die Cauchy–Schwartz Ungleichung benutzt. Damit folgt (1).

Wir setzen nun $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, dann gilt

$$Var[Y] = \frac{1}{n^2} Var\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \leq \frac{3v}{n} .$$

Mit der Chebycheff Ungleichung folgt nun (2):

$$P\left[\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^n X_i - E[X_i]\right| \geq \varepsilon\right] = P[|Y - E[Y]| \geq \varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} Var[Y] \leq \frac{3v}{n\varepsilon^2} .$$

d) i) Wir setzen $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^{n+1}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und P die Gleichverteilung auf Ω, d.h. $P[\{\omega\}] = (\frac{1}{6})^{n+1}$ für alle $\omega \in \Omega$. Weiter sei Y_i die Augenzahl im i-ten Wurf, d.h. $Y_i(\omega) = \omega_i$, für $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{n+1})$. Dann lässt sich schreiben: $A_i = \{Y_{i+1} > Y_i\}$. Wir erhalten nun:

$$P[A_i] = \frac{|\{\omega \in \Omega \ : \ \omega_{i+1} > \omega_i\}|}{|\Omega|} = \frac{15}{6^2}\frac{6^{n-1}}{6^{n-1}} = \frac{5}{12}$$

ii) Es seien $1 \leq i, j \leq n+1$ mit $|i-j| \geq 2$ sowie ohne Einschränkung $i < j$. Dann gilt $i < i+1 < j < j+1$. Daher erhalten wir:

$$P[A_i \cap A_j] = \frac{|\{\omega \in \Omega \ : \ \omega_{i+1} > \omega_i, \omega_{j+1} > \omega_j\}|}{|\Omega|} = \frac{15}{6^2}\frac{15}{6^2}\frac{6^{n-3}}{6^{n-3}} = P[A_i] \cdot P[A_j] \ .$$

Damit sind die Ereignisse A_i und A_j unabhängig.

iii) Es gilt $S_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}$. Wegen der Linearität des Erwartungswerts ergibt sich

$$E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}\right] = \sum_{i=1}^n P[A_i] = n\frac{5}{12} \ .$$

Für die Varianz von S_n erhalten wir:

$$\begin{aligned}
Var[S_n] &= E\left[\left|\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i} - P[A_i]\right|^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^n E\left[|\mathbf{1}_{A_i} - P[A_i]|^2\right] + \sum_{i \neq j} E\left[(\mathbf{1}_{A_i} - P[A_i])\left(\mathbf{1}_{A_j} - P[A_j]\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^n E\left[|\mathbf{1}_{A_i} - P[A_i]|^2\right] + 2\sum_{i=1}^{n-1} E\left[(\mathbf{1}_{A_i} - P[A_i])\left(\mathbf{1}_{A_{i+1}} - P[A_{i+1}]\right)\right] \\
&= n\left(P[A_1] - P[A_1]^2\right) + 2(n-1)\left(P[A_1 \cap A_2] - P[A_1]P[A_2]\right) \ .
\end{aligned}$$

Hier wurde im dritten Schritt die Unabhängigkeit der Ereignisse A_i und A_j für $|i-j| \geq 2$ aus ii) benutzt. Es bleibt, die Wahrscheinlichkeit $P[A_1 \cap A_2]$ zu berechnen. Wir erhalten:

$$P[A_1 \cap A_2] = \frac{|\{\omega \in \Omega \ : \ \omega_3 > \omega_2 > \omega_1\}|}{|\Omega|} = \frac{20}{6^3}\frac{6^{n-2}}{6^{n-2}} = \frac{5}{54} \ .$$

3. (Gleichgewichte von Markovketten) Sei $k \geq 3$, und sei (V, E) der vollständige Graph mit k Knoten, d.h. $V = \{1, 2, \ldots, k\}$ und E besteht aus allen zweielementigen Teilmengen $\{x, y\} \subseteq V$. Wir betrachten einen Random Walk $(X_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ auf dem Graphen, der in jedem Schritt zu einem zufällig ausgewählten Nachbarn springt.

a) Geben Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten $\pi(x, y)$ an. *[2 Pkt.]*

b) Zeigen Sie, dass die Gleichverteilung μ auf V ein Gleichgewicht ist. *[3 Pkt.]*

c) Berechnen Sie die Zwei-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten, und zeigen Sie

$$\pi^2(x, y) \;\geq\; \frac{1}{2}\,\mu(y) \qquad \text{für alle } y \in V.$$

[5 Pkt.]

d) Zeigen Sie, dass durch

$$\pi^2(x, y) \;=\; \frac{1}{2}\mu(y) + \frac{1}{2}\,q(x, y)$$

eine stochastische Matrix q mit Gleichgewicht μ definiert wird. *[7 Pkt.]*

e) Sei ν eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf V. Wie ist der Variationsabstand $d_{TV}(\nu, \mu)$ definiert? Beweisen Sie die Abschätzung

$$d_{TV}(\nu\pi^{2n}, \mu) \;\leq\; 2^{-n}\, d_{TV}(\nu, \mu)$$

zunächst für $n = 1$, und dann für beliebige $n \in \mathbb{N}$. *[8 Pkt.]*

f) Nach wievielen Schritten kann garantiert werden, dass der Variationsabstand der Verteilung von X_{2n} zur Gleichverteilung unterhalb eines vorgegebenen Werts $\epsilon > 0$ liegt ? *[3 Pkt.]*

Lösung:

a) Die Übergangswahrscheinlichkeiten für den einfachen Random walk auf dem vollständigen Graphen mit k Knoten sind gegeben durch:

$$\pi(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{k-1} \;, & x \neq y \;, \\ 0 \;, & x = y \;. \end{cases}$$

b) Es gilt:

$$(\mu\pi)(x) = \sum_{y\in V} \mu(y)\pi(y,x) = \sum_{y\in V} \frac{1}{k}\mathbf{1}_{x\neq y}\frac{1}{k-1} = \frac{1}{k} = \mu(x) \;.$$

Daher ist die Gleichverteilung μ ein Gleichgewicht.

c) Die Zwei-Schritt-übergangswahrscheinlichkeit ist gegeben durch:

$$\pi^2(x,y) = \sum_{z\in V} \pi(x,z)\pi(z,y) = \begin{cases} \frac{1}{(k-1)^2}(k-1) = \frac{1}{k-1} \;, & x = y \;, \\ \frac{1}{(k-1)^2}(k-2) \;, & x \neq y \;. \end{cases}$$

Da $k \geq 3$ erhalten wir $\frac{k-2}{k-1} \geq \frac{1}{2}$ und damit $\pi^2(x,y) \geq \frac{1}{2}\frac{1}{k-1} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{k} = \frac{1}{2}\mu(x)$ für alle $x, y \in V$.

d) Nach Teil c) folgt zunächst $q(x,y) = 2\pi^2(x,y) - \mu(y) \geq 0$ für alle $x, y \in V$. Weiter gilt

$$\sum_{y\in V} q(x,y) = \sum_{y\in V} 2\pi^2(x,y) - \mu(y) = 2 - 1 = 1 \;,$$

da π^2 eine stochastische Matrix und μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. Wegen

$$\sum_x \mu(x)q(x,y) = 2\sum_x \mu(x)\pi^2(x,y) - \sum_x \mu(x)\mu(y) = 2\mu(y) - \mu(y) = \mu(y)$$

ist μ ein Gleichgewicht von q. Dabei haben wir benutzt, dass aus $\mu\pi = \mu$ auch $\mu\pi^2 = \mu$ folgt.

e) Der Variationsabstand ist definiert durch

$$d_{TV}(\nu,\mu) = \frac{1}{2}\sum_{x\in V} |\nu(x) - \mu(x)| \;.$$

Es gilt

$$\nu\pi^2 = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu q \;.$$

Wegen $\mu q = \mu$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
d_{TV}(\nu\pi^2, \mu) &= \frac{1}{2}\sum_x |\frac{1}{2}(\nu q)(x) - \frac{1}{2}\mu(x)| \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sum_x |\nu q(x) - \mu q(x)| = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sum_x \Big|\sum_y q(y,x)\big(\nu(y) - \mu(y)\big)\Big| \\
&\le \frac{1}{4}\sum_{x,y} q(y,x)|\sum_y \nu(y) - \mu(y)| = \frac{1}{4}\sum_y |\nu(y) - \mu(y)| \\
&= \frac{1}{2} d_{TV}(\nu, \mu)\ .
\end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir

$$d_{TV}\big(\nu\pi^{2n}, \mu\big) \le \frac{1}{2} d_{TV}\big(\nu\pi^{2(n-1)}, \mu\big) \le \cdots \le 2^{-n} d_{TV}\big(\nu, \mu\big)\ .$$

f) Da die Totalvariation durch 1 beschränkt ist, gilt nach Teil e)

$$d_{TV}\big(\nu\pi^{2n}, \mu\big) \le 2^{-n}\ .$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gilt daher $d_{TV}\big(\nu\pi^{2n}, \mu\big) \le \varepsilon$, falls $2^{-n} \le \varepsilon$, i.e.

$$n \ge \frac{\log(\varepsilon^{-1})}{\log 2}\ .$$

4. (Interpolation und numerische Quadratur)

a) (i) Gegeben seien Stützstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sowie Stützwerte $f_0, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$. Geben Sie die allgemeine Newtonsche Darstellung des Interpolationspolynoms p mit $p(x_i) = f_i$ für $i = 0, \ldots, n$ mittels dividierter Differenzen an. Geben Sie weiterhin die Rekursionsformel der dividierten Differenzen an. *[3 Pkt.]*

(ii) Berechnen Sie zu den Werten

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	0	1
f_i	8	21	42	35

das Interpolationspolynom in der Newtonschen Darstellung. *[7 Pkt.]*

b) Sei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine gegebene Aufteilung des Intervals $[a, b]$. Sei $g_f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ die stückweise lineare Interpolation einer Funktion $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ in den gegebenen Stützstellen, d.h. $g_f(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$ und g_f ist linear auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.
Zeigen Sie: ist f zweimal stetig differenzierbar, so gilt für alle $x \in [a, b]$ die Fehlerabschätzung

$$|f(x) - g_f(x)| \le \frac{h^2}{8} \max_{a \le \xi \le b} |f''(\xi)|, \qquad \text{wobei } h = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - x_{i-1}|\,.$$

[5 Pkt.]

c) (i) Leiten Sie eine Quadraturformel

$$\int_a^b f(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}} \quad \to \quad Q(f) := \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

her, welche für jede Funktion f die stückweise lineare Interpolation g_f aus Aufgabe 1b) exakt integriert. Geben Sie die Gewichte a_i, $i = 0, \ldots, n$, explizit an.
[7 Pkt.]

(ii) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und Q die Quadraturformel aus (i). Geben Sie (ohne Beweis) das größte $q \in \mathbb{N}$ an, für welches gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}} - Q(f) \right| = O(h^q).$$

Hierbei ist $h = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - x_{i-1}|$. *[2 Pkt.]*

d) Gegeben seien $n + 1$ paarweise verschiedene Stützstellen x_i sowie Werte $f_i \ge 0$ für $i = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass ein Polynom p existiert mit

$$p(x_i) = f_i\,, \quad i = 0, \ldots, n, \qquad \text{und} \qquad p(x) \ge 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Dabei muss p nicht notwendigerweise vom Grad n sein. *[4 Pkt.]*

Lösung:

a) (i) Die Newtonsche Darstellung ist gegeben durch

$$p(x) = f[x_0] + \sum_{j=1}^{n} f[x_0, \dots, x_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i) \,.$$

Die Rekursionsformel für die dividierten Differenzen lautet

$$f[x_i, \dots, x_k] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_k] - f[x_i, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_i} \,, \quad 0 \le i < k \le n \,,$$

sowie $f[x_i] = f_i$ für $i = 0, \dots, n$.

(ii) Für die konkreten Werte berechnen sich die dividierten Differenzen wie folgt:

$$\begin{array}{r|llll}
-2 & f[x_0]=8 & & & \\
-1 & f[x_1]=21 & f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} & = 13 & \\
0 & f[x_2]=42 & f[x_1,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} & = 21 & f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=4 \\
1 & f[x_3]=35 & f[x_2,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2} & = -7 & f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}=-14
\end{array}$$

und

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{-14 - 4}{3} = -6 \,,$$

also

$$\begin{aligned}
p_{0,1,2,3}(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\
&\qquad + f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2) \\
&= 8 + 13(x + 2) + 4(x + 2)(x + 1) - 6(x + 2)(x + 1)x
\end{aligned}$$

b) Nach Satz 5.3 der VL gilt:

$$|f(x) - g(x)| \le \frac{\|f''\|_\infty}{2!} \,|\omega(x)| \,,$$

wobei $\omega(x) = \Pi_i(x - x_i)$ das Knotenpolynom ist. Also gilt für den Fehler der linearen Interpolation $g_k = g|_{I_k}$ im Interval $I_k = [x_x, x_{k+1}]$:

$$|f(x) - g_k(x)| \le \frac{\|f''\|_\infty}{2!} \,|(x_k - x)\,(x_{k+1} - x)| \le \frac{1}{8} \|f''\|_\infty (x_{k+1} - x_k)^2 \,,$$

da die Funktion $x \mapsto |(x_k - x)\,(x_{k+1} - x)|$ in I_k im Punkt $x = (x_{k+1} + x_k)/2$ mit $(x_{k+1} - x_k)^2/4$ maximiert wird.

c) (i) Hierbei handelt es sich um die Trapezregel. Sei g die stückweise linear Interpolation aus b). Dann gilt auf $I_k = [x_k, x_{k+1}]$:

$$\int_{I_k} f(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}} \to Q_k(f) = \int_{I_k} g(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}} = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \cdot (f(x_k) + f(x_{k+1}))\,.$$

Also folgt

$$\int_a^b f(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}} \to Q(f) = \int_a^b g(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \cdot (f(x_k) + f(x_{k+1})) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)\,,$$

mit $w_0 = x_1 - x_0$, $w_n = x_n - x_{n-1}$ und $w_k = x_{k+1} - x_{k-1}$ für $0 < k < n$.

(ii) Die Fehlerordnung ist $O(h^2)$, also $q = 2$.

d) Bestimme das Interpolationspolynom $q \in \Pi_n$ mit $q(x_i) = \sqrt{f_i}$, $i = 0, \ldots, n$ und setze $p(x) = q^2(x)$. Dann gilt $p(x_i) = q^2(x_i) = f_i$ und $p(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Alternativ: Setze $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i^2(x)$, wobei L_i die Langrange-Basispolynome mit $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ sind. Dann gilt $p(x_i) = f_i$ und $p \geq 0$ da $L_i^2 \geq 0$.

5. (Matrixnormen und lineare Iterationsverfahren)

a) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

(i) Wie ist die erzeugte Matrixnorm $\|A\|$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert? *[2 Pkt.]*

(ii) Zeigen Sie: $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *[2 Pkt.]*

b) Welche Matrixnorm wird durch die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^n$ erzeugt? Berechnen Sie $\|A\|_2$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

[4 Pkt.]

c) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 1 & 1.1 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 2.1 \end{pmatrix} , \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

In dieser Aufgabe betrachte man die Maximumsnorm $\|y\|_\infty = \max(|y_1|, |y_2|)$ in $\mathbb{R}^2$.

(i) Geben Sie Lösungen x bzw. $\tilde{x}$ der Gleichungssysteme $Ax = b$ bzw. $A\tilde{x} = \tilde{b}$ an. *[2 Pkt.]*

(ii) Bestimmen Sie den relativen Fehler $\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ und das relative Residuum $\frac{\|b-\tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}$. *[2 Pkt.]*

(iii) Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa_\infty(A)$ bzgl. der durch die Maximumsnorm erzeugten Matrixnorm. *[3 Pkt.]*

(iv) Wie lässt sich allgemein der relative Fehler mittels der Konditionszahl durch das relative Residuum abschätzen? Interpretieren Sie diesbezüglich das Ergebnis von (ii). *[2 Pkt.]*

d) (i) Es sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ eine konvergente Folge von Matrizen mit Grenzwert A. Zeigen Sie: für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lim_{k\to\infty} A_k x = Ax$. *[2 Pkt.]*

(ii) Seien $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Die Neumannsche Reihe $\sum_{\ell=0}^{\infty} T^\ell$ sei konvergent. Zeigen Sie (ohne Verweis auf die Vorlesung), dass dann die lineare Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + b$$

für jeden Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ gegen denselben Grenzwert konvergiert. *[6 Pkt.]*

(iii) Gilt in (ii) auch die Umkehrung, d.h., folgt aus der vom Startwert unabhängigen Konvergenz der linearen Fixpunktiteration gegen einen eindeutigen Grenzwert die Konvergenz der entsprechenden Neumannschen Reihe? (kurze Begründung reicht, kein Beweis) *[3 Pkt.]*

Lösung:

a) (i) Die Definition lautet

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|\,.$$

(ii) Aus $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$ folgt

$$\|AB\| = \max_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \|A\| \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\|\,\|B\|\,.$$

b) Die durch die euklidische Norm erzeugte Matrixnorm ist die Spektralnorm $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$, wobei $\rho(B)$ der betragsmässig größte Eigenwert einer symmetrischen Matrix B ist, also

$$\rho(B) = \max\{\,|\lambda| \,:\, \lambda \text{ ist EW der Matrix } B\,\}\,.$$

Für die gegebene Matrix A gilt

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,,$$

denn $\det(A^TA - \lambda I) = ((2-\lambda)(1-\lambda)-1)(1-\lambda)$ hat die Nullstellen $\lambda = 1$ und $\lambda = (3 \pm \sqrt{5})/2$.

c) (i) Es gilt

$$A^{-1} = 5\begin{pmatrix} 1.1 & -0.9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(ii) Aus (i) folgt $\|x\|_\infty = 1$, $\|\tilde{x}\|_\infty = 2$, $\|x-\tilde{x}\|_\infty = 1$ also $\|x-\tilde{x}\|_\infty/\|x\|_\infty = 1$. Anderseits $\|b\|_\infty = 2.1$, $\|b-\tilde{b}\|_\infty = 0.1$, also $\|b-\tilde{b}\|_\infty/\|b\|_\infty = 1/21$.

(iii) Die erzeugte Matrixnorm ist die Zeilensummennorm, also gilt $\|A\|_\infty = 2.1$ und $\|A^{-1}\|_\infty = 10$, also $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 21$.

(iv) Laut Satz 6.12 gilt $\|x-\tilde{x}\|_\infty/\|x\|_\infty \leq \kappa_\infty(A)\|b-\tilde{b}\|_\infty/\|b\|_\infty$. Im vorliegenden Fall ergibt sich $\|x-\tilde{x}\|_\infty/\|x\|_\infty \leq 21 \cdot 1/21 = 1$. Dies zeigt sowohl, dass die Abschätzung scharf ist, als auch, dass kleine Residuen nicht notwendigerweise kleine Fehler implizieren.

d) (i) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann gilt für jedes x:

$$\|A_k x - Ax\| = \|(A_k - A)x\| \leq \|A_k - A\|\|x\| \to 0,$$

also $\lim_{k\to\infty} A_k x = Ax$.

(ii) Sei $S_k = \sum_{\ell=0}^{k} T^\ell$. Dann gilt

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + b = \cdots = T^{k+1}x^{(0)} + T^k b + \ldots Tb + b = T^{k+1}x^{(0)} + S_k b. \quad (3)$$

Die Neumannsche Reihe ist laut Voraussetzung konvergent, es existiert also $S = \lim_{k\to\infty} S_k$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} T^k = \lim_{k\to\infty} (S_k - S_{k-1}) = 0.$$

Aus (3) folgt dann mit (i):

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = Sb$$

unabhängig von der Wahl des Startwerts $x^{(0)}$.

(iii) Die Umkehrung gilt auch. Nach Satz 6.7 aus der VL ist die Konvergenz der Fixpunktiteration mit $\rho(T) < 1$ äquivalent. Nach einer Übungsaufgabe impliziert dies die Konvergenz der Neumannschen Reihe.

6. (Nichtlineare Iterationsverfahren)

a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz in $\mathbb{R}^n$ bzgl. einer Norm $\|\cdot\|$. Es genügt hierbei, eine der drei möglichen Abschätzungen für den Fehler $\|x^{(k)} - x^*\|$ der Fixpunktiteration anzugeben. *[5 Pkt.]*

b) (i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(x-1)$. Berechnen Sie ausgehend vom Startwert $x^{(0)} = 2$ die ersten zwei Iterierten $x^{(1)}, x^{(2)}$ des Newton-Verfahrens. Wie viele korrekte Nachkommastellen hat die Iterierte $x^{(2)}$ bezogen auf die Nullstelle $x^* = 1$? *[4 Pkt.]*

(ii) Wenn Sie davon ausgehen, dass bereits für $k = 2$ eine quadratische Konvergenzrate $|x^{(k+1)} - x^*| \leq c|x^{(k)} - x^*|^2$ mit einer Konstanten $0 \leq c \leq 1$ vorliegt, wie viele korrekte Nachkommastellen erwarten Sie dann mindestens für die nächste Iterierte $x^{(3)}$ (mit Beweis)? *[3 Pkt.]*

c) Gegeben seien zwei stetig differenzierbare Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sowie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g(x_1) \\ h(x_2) \end{pmatrix}.$$

(i) Formulieren Sie die Newtoniteration zu dieser Funktion und vereinfachen Sie die Formel so weit wie möglich. Geben Sie Bedingungen an, für welche Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ die Newtoniteration nicht definiert ist. *[4 Pkt.]*

(ii) Seien nun $g(t) = t(t+2)$ und $h(t) = t - 1$. Dann hat f die Nullstelle $(0, 1)$. Bestimmen Sie die Ableitung (Jacobi-Matrix) $Df(0, 1)$. Konvergiert das Newton-Verfahren lokal quadratisch gegen $(0, 1)$? Prüfen Sie zur Begründung die Voraussetzungen des entsprechenden Satzes aus der Vorlesung. *[5 Pkt.]*

d) Sei $\alpha > 0$. Bestimmen Sie $A, B, C \in \mathbb{R}$ so, dass das Verfahren

$$x_{k+1} = Ax_k + \frac{B}{x_k^2} + \frac{C}{x_k^5}$$

lokal mit Ordnung drei gegen $\sqrt[3]{\alpha}$ konvergiert. *[7 Pkt.]*

Lösung:

a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer und abgeschlossen. Die Funktion $\Phi : M \to M$ sei bzgl. einer gegebenen Norm $\|.\|$ eine Kontraktion, d.h. habe Lipschitzkonstante $L < 1$. Dann besitzt Φ genau einen Fixpunkt $x^* = \Phi(x^*)$ in M. Für jeden Startwert $x^{(0)} \in M$ strebt die Fixpunktiteration $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ gegen x^*.

Es gelten für alle n die folgenden Abschätzungen:

$$\|x^{(n)} - x^*\| \leq L \, \|x^{(n-1)} - x^*\| \qquad \text{(Monotonie)}$$

$$\|x^{(n)} - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L} \, \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \qquad \text{(A-priori Abschätzung)}$$

$$\|x^{(n)} - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \, \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| \qquad \text{(A-posteriori Abschätzung)}$$

b) (i) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(x-1)$, gilt $f'(x) = 2x - 1$. Die Iterationsvorschrift lautet

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)}(x^{(k)} - 1)}{2x^{(k)} - 1} = \frac{(x^{(k)})^2}{2x^{(k)} - 1} \, .$$

Es folgt

k	$x^{(k)}$	#korr. Nachkommastellen
0	2	
1	$2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$	0
2	$\frac{4}{3} - \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{16}{15} = 1 + \frac{1}{15}$	1

(ii) Der Fehler in der zweiten Iteration ist also $|x_2 - 1| = \alpha 10^{-2}$ mit $0 < \alpha < 10$. Unter der gegebenen Annahme gilt dann

$$|x^{(3)} - 1| \leq c|x^{(2)} - 1|^2 = c\alpha^2 10^{-4} = c\frac{\alpha^2}{10} 10^{-3} = \beta 10^{-3}$$

mit $0 < \beta < 10$. Wir erwarten also mindestens 2 korrekte Nachkommastellen.

c) (i) Es gilt

$$Df(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} g'(x_1) & 0 \\ 0 & h'(x_2) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (Df(x_1,x_2))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g'(x_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h'(x_2)} \end{pmatrix},$$

also lautet das Newton-Verfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \begin{pmatrix} g'(x_1) & 0 \\ 0 & h'(x_2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g(x_1) \\ h(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} - \frac{g(x_1^{(k)})}{g'(x_1^{(k)})} \\ x_2^{(k)} - \frac{h(x_2^{(k)})}{h'(x_2^{(k)})} \end{pmatrix}$$

Die Iteration ist nicht definiert für Werte x mit $g'(x_1) = 0$ oder $h'(x_2) = 0$.

(ii) Die Ableitung ist

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und offenbar stetig in x. Es ist $Df(0,1)$ invertierbar. Für alle x, y einer Umgebung von $(0,1)$ gilt überdies

$$\begin{aligned} \|Df(x)^{-1}(Df(x) - Df(y))\|_2 &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{2(x_1-y_1)}{2x_1+2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left| \frac{x_1 - y_1}{x_1 + 1} \right| \\ &\leq \frac{1}{|x_1+1|} \|x-y\|_2 \leq 4\|x-y\|_2, \end{aligned}$$

etwa wenn $|x_1| \leq 3/4$ (andere Umgebungen und Konstanten natürlich möglich). Daher sind die Vorraussetzungen für lokal quadratische Konvergenz erfüllt.

d) Nach Satz 6.28 (lokales Kontraktionsprinzip) genügt ist für die Verfahrensfunktion ϕ zu zeigen, dass sie in einer Umgebung ihres Fixpunktes x^* mindestens 3 mal stetig differenzierbar ist und $\phi'(x^*) = \phi''(x^*) = 0$ gilt. Zudem sollte die Lösung $\sqrt[3]{\alpha}$ Fixpunkt von ϕ sein. Wähle also hier den Ansatz $\phi(x) = Ax + Bx^{-2} + Cx^{-5}$. Dann muss gelten

$$\begin{aligned}
\alpha^{\frac{1}{3}} &= \phi(\alpha^{\frac{1}{3}}) = A\alpha^{\frac{1}{3}} + B\alpha^{-\frac{2}{3}} + C\alpha^{-\frac{5}{3}} \\
0 &= \phi'(\alpha^{\frac{1}{3}}) = \left(A - 2Bx^{-3} - 5Cx^{-6}\right)|_{x=\sqrt[3]{\alpha}} = A - 2B\alpha^{-1} - 5C\alpha^{-2} \\
0 &= \phi''(\alpha^{\frac{1}{3}}) = \left(6Bx^{-4} + 30Cx^{-7}\right)|_{x=\sqrt[3]{\alpha}} = 6B\alpha^{-4/3} + 30C\alpha^{-7/3}
\end{aligned}$$

Dies ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 1/\alpha & 1/\alpha^2 \\ 1 & -2/\alpha & -5/\alpha^2 \\ 0 & 1 & 5/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{II} = \text{II - I} \rightsquigarrow \quad &\begin{pmatrix} 1 & 1/\alpha & 1/\alpha^2 \\ 0 & -3/\alpha & -6/\alpha^2 \\ 0 & 1 & 5/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{II} = \text{II} \cdot \frac{-\alpha}{3} \rightsquigarrow \quad &\begin{pmatrix} 1 & 1/\alpha & 1/\alpha^2 \\ 0 & 1 & 2/\alpha \\ 0 & 1 & 5/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha/3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{III} = \text{III - II} \rightsquigarrow \quad &\begin{pmatrix} 1 & 1/\alpha & 1/\alpha^2 \\ 0 & 1 & 2/\alpha \\ 0 & 0 & 3/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha/3 \\ -\alpha/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung

$$\begin{aligned}
C &= -\alpha^2/9 \\
B &= \alpha/3 - 2/\alpha \cdot C = 3\alpha/9 + 2\alpha/9 = 5\alpha/9 \\
A &= 1 - 1/\alpha \cdot B - 1/\alpha^2 \cdot C = 1 - 5/9 + 1/9 = 5/9
\end{aligned}$$

Also

$$x_{k+1} = \frac{5}{9}x_k + \frac{5\alpha}{9x_k^2} - \frac{\alpha^2}{9x_k^5}.$$