Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2009
Andreas Eberle, Martin Slowik

1. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik II"

Abgabe bis Dienstag, 14 Uhr, in der Mathematikbibliothek (LWK)

---

1. (Gleichverteilung)

a) Sei Ω eine endliche Menge. Definiere die Gleichverteilung P auf Ω und zeige durch Überprüfen der Axiome, dass P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

b) In einer Urne befinden sich N Kugeln, von denen K rot sind. Wir ziehen n Kugeln ohne Zurücklegen. Beschreibe dieses Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe k rote Kugeln enthält, ist

$$\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}\Big/\binom{N}{n}\,.$$

2. (Kolmogorovsche Axiome)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \in \mathcal{A}$.

a) Es gelte $P[A] = \frac{3}{4}$ und $P[B] = \frac{1}{3}$. Zeige: $\frac{1}{12} \leq P[A \cap B] \leq \frac{1}{3}$ und demonstriere anhand von Beispielen, dass beide Extremfälle eintreten können.

b) Zeige, dass $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$ ist.

c) Ist $A \cup B = \Omega$, dann gilt $P[A \cap B] = P[A]\,P[B] - P[A^c]\,P[B^c]$.

3. (de Méré Paradox und Geburtstagsparadox)

a) Welches der folgenden beiden Ereignisse ist wahrscheinlicher:

1.) mit 4 Würfen eines fairen Würfels mindestens einmal die 6 zu erhalten,
2.) mit 24 Würfen von zwei fairen Würfeln mindestens einmal eine doppelte 6 zu bekommen?

Das Problem stammt von Chevalier de Méré, der mit seinen Spielproblemen und deren Lösungen durch Pascal in die Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie eingegangen ist.

b) Sei p_n die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit n Schülern wenigstens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Vereinfachend sei dabei angenommen, dass kein Schüler am 29. Februar geboren ist und alle anderen Geburtstage gleich wahrscheinlich sind. Zeige (unter Verwendung der Ungeichung $1 - x \leq \mathrm{e}^x$), dass

$$p_n \geq 1 - \exp\big(-\,n(n-1)/730\,\big).$$

Welche untere Schranke ergibt sich für p_{30}?

4. (Gerüchte)
In einer Stadt mit $n+1$ Einwohnern erzählt eine Person einer zweiten ein Gerücht, diese ihrerseits erzählt es erneut weiter, usw. Bei jedem Schritt wird der ,,Empfänger" zufällig unter den n möglichen Personen mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt (- gelegentlich erzählt also auch jemand das Gerücht derselben Person, von der er es gehört hat). Das Gerücht wird auf diese Weise r mal weiter erzählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

a) es nicht zum Urheber zurückkommt,

b) es keiner Person zweimal erzählt wird.

c) Setze im Ergebnis von a) insbesondere $r = n+1$, und berechne den Limes für $n \to \infty$.

5. (Ereignisse als Mengen)
Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, und seien $A, B, A_n \in \mathcal{A}$ Ereignisse. Was bedeuten (mit Begründung) die folgenden Ereignisse anschaulich?

$$\text{a) } A \cap B \qquad \text{b) } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{c) } \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Sei nun speziell $\Omega = \big\{\omega \equiv (x_1, x_2, \ldots) \ \mid \ x_i \in \{-1, +1\}\big\}$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildungen $S_n : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$S_n(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \omega \in \Omega.$$

Was bedeuten die den folgenden Mengen zugeordneten Ereignisse anschaulich?

$$\text{d) } S_n^{-1}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) \qquad \text{e) } \bigcap_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{Q} \\ \varepsilon > 0}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} S_m^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$$

P. (Zufallsexperimente mit Mathematica: Würfeln I) *(Hinweise s. Rückseite)*

a) Um reproduzierbare Ergebnisse zu erhalten, initialisieren Sie den Zufallszahlengenerator zunächst mit **SeedRandom[”Nachname”]**, wobei Sie für *Nachname* Ihren eigenen Namen einsetzen.

   Erzeugen Sie dann eine Liste mit 1000 Zufallszahlen aus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, speichern Sie diese in der Variable x, und erstellen Sie mithilfe von **Histogram**[. . . , . . . , ”Probability”] ein Histogramm der *relativen* Häufigkeiten der Werte 1 bis 6.

   Erzeugen Sie mithilfe von **Manipulate** ein Histogramm der ersten k Würfelwürfe, wobei k zwischen 1 und 1000 variiert werden kann. Was beobachten Sie ?

b) Erstellen Sie die Liste der relativen Häufigkeiten h_k der Augenzahl "6" unter den ersten k Würfen, $k = 1, \ldots, 1000$. Plotten Sie h_k als Funktion von k.

   Tragen Sie in den Plot auch die konstante Funktion mit Wert 1/6 ein. Können Sie Ihre Beobachtung aus dem ersten Teil bestätigen ?

   (Sie können z.B. die Funktionen **Count**, **ListLinePlot** *und* **Show** *verwenden).*

Hinweise zu den Programmier- und experimentellen Stochastikaufgaben:

Die Bearbeitung der mit "P" gekennzeichneten Programmieraufgaben erfordert Zugang zu Mathematica 7.0. Installieren Sie dazu die über die Campuslizenz erhältliche Software auf Ihrem Computer, oder nutzen Sie den CIP-Pool des IAM im Hochschulrechenzentrum, Wegelerstr. 6. Die CIP-Pool-Tutoren stehen für Beratung und Hilfe bei der Bearbeitung der Aufgaben zur Verfügung. Einführungen in Mathematica finden Sie auf der Webpage "http://www.uni-bonn.de/∼eberle/Mathematica/index.html".

Speichern Sie die Mathematica Notebooks mit den Lösungen der Übungsaufgaben bitte jeweils als pdf-file (im Menue File ↪ Save as ↪ Dateityp pdf) mit Namen "NachnameX.pdf", wobei Nachname Ihr Familienname, und X die Nummer des Übungsblatts ist. Schicken Sie das pdf-file per E-Mail an Ihren Übungsgruppen-Tutor, oder geben Sie einen Ausdruck des Notebooks ab.

Vor und nach Pfingsten werden wir umfangreichere Programmieraufgaben stellen, die dann im CIP-Pool abzugeben sind. Diese Aufgaben werden mit dem Faktor 5 gewichtet - die in den nächsten Wochen gestellten kürzeren Aufgaben zählen einfach.

Kriterien für die Klausurzulassung:

Sie können gerne in Gruppen arbeiten – jeder sollte aber für sich mindestens die Hälfte der gefundenen Lösungen selbständig aufschreiben. Einzelne Übungsaufgaben können von den Tutoren angenommen oder abgelehnt werden. Die Annahme erfolgt, wenn aus Ihrer Lösung ersichtlich ist, daß Sie sich intensiv mit der Aufgabe beschäftigt haben - Ihre Lösung muß aber nicht unbedingt richtig bzw. vollständig sein ! Bei nicht korrekt gelösten Programmieraufgaben (mit P gekennzeichnet) kann zur Annahme eine erneute Abgabe verlangt werden. Bedingungen für die Klausurzulassung:

- Pro Person wurden jeweils 50% der Übungsaufgaben und 50% der Programmieraufgaben von den Tutoren akzeptiert.

- Pro Gruppe (Gruppengröße maximal 3) mindestens 70% der Übungsaufgaben akzeptiert.

Als Rückmeldung für Sie werden die Tutoren für die einzelnen Aufgaben Punkte zwischen 0 und 4 vergeben. Diese Punkte dienen nur zu Ihrer Information, haben aber keine Bedeutung für die Klausurzulassung !

Zusätzliche Betreuung:

Bei spezifischen Schwierigkeiten mit Teilen der Vorlesung oder der Übungen steht Ihnen Nikolaus Schweizer als aus Studienbeiträgen finanzierter "Supertutor" zur Verfügung. Er bietet bei Bedarf zusätzliche Übungen oder Repetitorien zu bestimmten Themen, oder auch individuelle Betreuung an. Außerdem koordiniert er die Erstellung eines Vorlesungsskripts. Bitte kontaktieren Sie ihn bei konkreten Wiederholungswünschen, Fragen oder Problemen, sowie Anmerkungen und Korrekturen zum Skript unter

nikosch@uni-bonn.de

Literatur zur Vorlesung:

a) Stochastik

- Föllmer, Künsch: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Skript ETH Zürich, ftp://ftp.stat.math.ethz.ch/U/Kuensch/skript-einf.ps
- Krengel: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*
- Kersting, Wakolbinger: *Elementare Stochastik*
- Grimmett, Welsh: *Probability - An Introduction*
- Grimmett, Stirzaker: *Probability and Random Processes*
- Häggström: *Finite Markov Chains and Stochastic Algorithms*

b) Numerik

- Harbrecht: *Algorithmische Mathematik II*, Skript Sommersemester 2008, http://harbrecht.ins.uni-bonn.de/teaching/alma/skript.pdf
- Deuflhard, Hohmann: *Numerische Mathematik*
- Hanke-Burgeois: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*
- Stoer: *Numerische Mathematik I*
- Quarteroni, Sacco, Saleri: *Numerical Mathematics*