Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2009
Andreas Eberle, Nikolaus Schweizer

3. Programmierprojekt zur AlMa II

Abgabe bis 9.7. im CIP-Pool

P. (Gradienten- und cg-Verfahren für die Poissongleichung)
Ziel dieses Projekts ist der Vergleich von Iterationsverfahren zur Lösung der diskreten Poissongleichung auf einem Quadrat im $\mathbb{Z}^2$. Sei

$$D \;=\; \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Gesucht ist eine Funktion $u : D \to \mathbb{R}$, $u = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit

$$\begin{aligned} -u_{i+1,j} + 2u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} + 2u_{i,j} - u_{i,j-1} &= g_{i,j} \quad \text{für } 2 \leq i, j \leq n-1, \\ u_{i,j} &= 0 \quad \text{für } i = 1, n \text{ bzw. } j = 1, n. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: u löst die Gleichung $-\Delta_{\mathbb{Z}^2} u = g$ auf dem Inneren von D, und u verschwindet auf dem Rand von D. Hierbei ist $g = (g_{i,j})$ eine vorgegebene Funktion auf $\{2, \ldots, n-1\} \times \{2, \ldots, n-1\}$.

Das lineare Gleichungssystem läßt sich auch kompakt in der Form

$$Au \;=\; b$$

mit Vektoren $u = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ und $b = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ der Dimension $d = n^2$, und einer $n^2 \times n^2$ Matrix A schreiben. **Beachten Sie:** Wenn Sie das Problem implementieren, bietet es sich an, die *Vektoren* u und b als *zweidimensionale Felder* zu interpretieren !

Aufgabe:

a) Geben Sie die Koeffizienten $b_{i,j}$ und $(Au)_{i,j}$ der Vektoren b und Au an. Definieren Sie Mathematica-Funktionen, die b und Au aus g bzw. u berechnen.

b) Schreiben Sie Mathematica-Funktionen, die je einen Iterationsschritt des Gradientenverfahrens und des cg-Verfahrens für das Gleichungssystem $Au = b$ ausführen.

c) Führen Sie das Gradienten- und das cg-Verfahren durch - zum Beispiel für $n = 10$. Wählen Sie dabei g unter anderem so, dass die exakte Lösung u durch $u_{i,j} = 1$ für $2 \leq i, j \leq n-1$, $u = 0$ auf dem Rand, gegeben ist. Stellen Sie die im Iterationsverfahren erhaltenen Vektoren/Arrays $\left(u_{i,j}^{(k)}\right)_{i,j}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ graphisch dar (z.B. mit ListPointPlot3D oder ListPlot3D).

d) Plotten Sie für beide Verfahren die ℓ^2-Norm des Residuums $r^{(k)}$ als Funktion von k, und vergleichen Sie die Verfahren.