Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2009
Andreas Eberle, Martin Slowik

2. Klausur zu „Algorithmische Mathematik II"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält 4 Aufgaben (2 zur Stochastik, 2 zur Numerik), von denen Sie 3 bearbeiten sollten. Bitte streichen Sie die nicht bearbeitete Aufgabe, da nur 3 Aufgaben bei der Korrektur berücksichtigt werden.
- Pro Aufgabe können maximal 20 Punkte erreicht werden.
- Nehmen Sie sich am Anfang ca. 15 Minuten Zeit, um alle Aufgaben sorgfältig durchzulesen und zu entscheiden, welche Aufgaben Sie bearbeiten.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Abgabe bis spätestens 11.30 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4			**Summe**	**Note**
Punkte								

1. (Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte)

a) Was ist eine diskrete Zufallsvariable (Definition)? Definieren Sie den Erwartungswert einer diskreten reellwertigen Zufallsvariable. *[3 Pkt]*

b) Sei T eine Zufallsvariable mit nichtnegativen ganzzahligen Werten. Zeigen Sie: *[4 Pkt]*

$$E[T] \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} P[T \geq k].$$

(Falls nötig, können Sie ohne Beweis voraussetzen, dass der Erwartungswert linear von der Zufallsvariable abhängt).

c) Spieler A und B spielen ein Spiel mit mehreren Runden. A gewinnt jede Runde mit Wahrscheinlichkeit p, B mit Wahrscheinlichkeit q, und mit Wahrscheinlichkeit r gibt es ein Unentschieden, wobei $p+q+r=1$. Die Ergebnisse der einzelnen Runden seien unabhängig. Der erste Spieler, der eine Runde gewinnt, gewinnt das Spiel.

(i) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A das Spiel in der n-ten Runde gewinnt. Folgern Sie, dass A das Spiel mit Wahrscheinlichkeit $p/(p+q)$ gewinnt. *[4 Pkt]*

(ii) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl von Runden, die gespielt werden, bis das Spiel endet. *[4 Pkt]*

(iii) Zeigen Sie: Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die erste Runde unentschieden ausging, gegeben Spieler A gewinnt vor oder in der n-ten Runde, ist gleich $r(1-r^{n-1})/(1-r^n)$. *[3 Pkt]*

(iv) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass A das Spiel gewinnt, gegeben das Ereignis, dass das Spiel nach genau n Runden endet. *[2 Pkt]*

2. (Bedingte Wahrscheinlichkeiten)

a) Definieren Sie die Begriffe *Wahrscheinlichkeitsraum* und *bedingte Wahrscheinlichkeit.* [*7 Pkt*]

b) Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ eine Zerlegung des Grundraums Ω in disjunkte Ereignisse $H_1, \ldots, H_n$ mit $P[H_i] > 0$ für $i = 1, \ldots, n$, und sei A ein weiteres Ereignis mit $P[A] > 0$. Beweisen Sie die Bayessche Regel [*5 Pkt*]

$$P[H_i|A] \;=\; \frac{P[A|H_i] \cdot P[H_i]}{\sum_{j=1}^{n} P[A|H_j] \cdot P[H_j]}.$$

Folgern Sie alle Beweisschritte sorgfältig aus den Definitionen. Welche entsprechende Aussage gilt im Fall $P[H_1] = 0$?

c) Eine Schachtel enthält 5 Fahrkarten. Eine unbekannte Anzahl davon sind rot, die übrigen sind grün. Angenommen, Sie gehen zunächst davon aus, dass sich mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit 0, 1, 2, 3, 4, bzw. 5 rote Fahrkarten in der Schachtel befinden. Es werden nun 3 Fahrkarten ohne Zurücklegen entnommen.

(i) Modellieren Sie das beschriebene Zufallsexperiment auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. [*2 Pkt*]

(ii) Die Farbe der entnommenen Fahrkarten sei rot, grün und rot. Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Schachtel anfänglich 3 rote Fahrkarten enthalten hat, gegeben diese Information. [*3 Pkt*]

d) Sei S eine endliche Menge und μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $S \times S$ mit Gewichten $\mu(x, y)$, $x, y \in S$. Geben Sie die Übergangsmatrix eines Gibbs-Samplers zur Simulation einer Stichprobe von der Wahrscheinlichkeitsverteilung μ an. [*3 Pkt*]

3. (Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme)

a) Geben Sie den Algorithmus des Jacobi-Verfahrens zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A\,x = b$ mit invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $b \in \mathbb{R}^d$ an. [*2 Pkt*]

b) Stellen Sie den Iterationsschritt des Jacobi-Verfahrens in der Form [*4 Pkt*]

$$x^{(k+1)} \;=\; T\,x^{(k)} + f$$

mit einer Matrix $T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $f \in \mathbb{R}^d$ dar.

c) Wie ist der Spektralradius $\rho(T)$ definiert? Zeigen Sie: Ist $\|\cdot\|_V$ eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ und $\|\cdot\|_M$ eine mit $\|\cdot\|_V$ verträgliche Matrixnorm, dann gilt [*7 Pkt*]

$$\rho(T) \;\le\; \|T\|_M.$$

Folgern Sie, dass für die Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens $\rho(T) < 1$ gilt, falls die Matrix A strikt diagonaldominant ist.

d) Geben Sie den Iterationsschritt im Algorithmus des relaxierten Jacobi-Verfahrens (JOR-Verfahren) mit Relaxationsparameter ω an. Zeigen Sie, dass die Iterationsmatrix T_ω in diesem Fall durch [*3 Pkt*]

$$T_\omega \;=\; I - \omega D^{-1} A$$

gegeben ist, wobei D der Diagonalanteil der Matrix A ist.

e) Folgern Sie: Ist A symmetrisch und positiv definit, dann konvergiert das JOR-Verfahren für alle $\omega \in (0, 2/\rho(D^{-1}A))$. [*4 Pkt*]

4. (Splines)
Sei

$$\Delta \;=\; \{a, a+h, a+2h, \ldots, b\}, \qquad h = (b-a)/n, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine äquidistante Unterteilung des Intervalls $[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in C^2([a,b])$.

a) Geben Sie die stückweise lineare (stückweise affine), stetige Interpolation $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ der Funktion f bzgl. des Gitters Δ explizit an. *[2 Pkt]*

b) Die Ableitung $s'(x)$ existiert für alle $x \in [a,b] \setminus \Delta$. Zeigen Sie, dass die stückweise stetige Funktion $s' - f'$ orthogonal zu allen stückweise konstanten Funktionen *[6 Pkt]*

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = c_i \quad \forall\, x \in \big(a + i\,h, a + (i+1)\,h\big), \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$c_i \in \mathbb{R}$, bzgl. des L^2-Skalarprodukts

$$\big(f_1, f_2\big) \;=\; \int_a^b f_1(x)\, f_2(x)\, dx \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f_1(x)\, f_2(x)\, dx$$

ist. Folgern Sie:

$$\int_a^b s'(x)^2\, dx \;\le\; \int_a^b f'(x)^2\, dx.$$

c) Was ist ein kubischer Spline bzgl. des Gitters Δ (Definition)? Geben Sie die Dimension des Raums $S_3(\Delta)$ der kubischen Splines bzgl. Δ an. Verifizieren Sie Ihre Aussage durch Angabe einer Basis (Basis nur angeben - kein Beweis der Basiseigenschaft). *[4 Pkt]*

d) Sei nun $s \in S_3(\Delta)$ ein kubischer Spline mit *[5 Pkt]*

$$s(a+ih) \;=\; f(a+ih) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n, \tag{1}$$

$$s'(a) \;=\; s'(b) \quad \text{und} \quad s''(a) \;=\; s''(b). \tag{2}$$

Zeigen Sie: Gilt $f'(a) = f'(b)$, dann folgt

$$\big(s'' - f'', \ell\big) \;=\; 0$$

für alle linearen Splines $\ell \in S_1(\Delta)$ mit $\ell(a) = \ell(b)$. Folgern Sie

$$\int_a^b s''(x)^2\, dx \;\le\; \int_a^b f''(x)^2\, dx.$$

e) Zeigen Sie (z.B. unter Verwendung von d)), dass das Interpolationsproblem *[3 Pkt]*

$$s(a + i\,h) \;=\; y_i \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n$$

mit den periodischen Randbedingungen (2) für beliebige Werte $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $s \in S_3(\Delta)$ hat.