Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2009
Andreas Eberle, Martin Slowik

2. Klausur zur „Algorithmische Mathematik II"

Lösungen

---

1. (Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte)

a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und S eine abzählbare Menge. Eine diskrete Zufallsvariable ist eine Abbildung $X : \Omega \to S$ mit der Eigenschaft

$$\forall\, a \in S \quad \text{gilt} \quad X^{-1}(a) \;:=\; \big\{\omega \in \Omega \,\big|\, X(\omega) = a\big\} \;\in\; \mathcal{A}.$$

Weiterhin nennt man X eine diskrete, reellwertige Zufallsvariable, falls $S \subset \mathbb{R}$ ist. Der Erwartungswert einer diskrete, reellwertigen Zufallsvariable X bezüglich P ist nun definert durch

$$E[X] \;:=\; \sum_{a \in S} a\, P[X = a],$$

sofern die Summe wohldefiniert ist.

b) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T : \Omega \to \mathbb{Z}_+$ eine Zufallsvariable. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P[T \geq k] \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} P[T = n] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} P[T = n] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n\, P[T = n] \;=\; E[T],$$

wobei Vertauschung der Summen im zweiten Schritt wegen der Nichtnegativität aller Terme erlaubt ist.

c) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to \{-1, 0, 1\}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$P[X_i = -1] \;=\; q, \qquad P[X_i = 0] \;=\; r, \qquad P[X_i = 1] \;=\; p.$$

(i) Bezeichne mit A_n das Ereignis, dass Spieler A in der n-ten Runde gewinnt. Dann gilt

$$\begin{aligned} P[A_n] \;&=\; P[X_1 = 0, \ldots, X_{n-1} = 0, X_n = 1] \\ &=\; P[X_1 = 0] \cdot \ldots \cdot P[X_{n-1} = 0] \cdot P[X_n = 1] \;=\; r^{n-1}\, p, \end{aligned}$$

wobei im 2. Schritt die Unabhängigkeit der X_i benutzt wurde. Daraus ergibt sich dann aber für

$$\begin{aligned} P[\text{"Spieler A gewinnt"}] \;=\; P\Big[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big] \;&=\; \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\, p \\ &=\; p \sum_{n=0}^{\infty} r^n \;=\; \frac{p}{1-r} \;=\; \frac{p}{p+q}, \end{aligned}$$

wobei im 2. Schritt die σ-Additivität benutzt wurde.

(ii) Die Wartezeit, bis das Spiel beendet ist, läßt sich beschreiben durch die Zufallsvariable $T : \Omega \to \mathbb{Z}_+$,

$$T \;:=\; \min\big\{n \in \mathbb{N} \,\big|\, X_n \in \{-1, 1\}\big\}.$$

Für die Verteilung dieser Zufallsvariable gilt zunächst einmal

$$\begin{aligned} P[T = n] \;&=\; P[X_1 = 0, \ldots, X_{n-1} = 0, X_n \in \{-1, 1\}] \\ &=\; \prod_{i=1}^{n-1} P[X_i = 0] \cdot P[X_n \in \{-1, 1\}] \;=\; r^{n-1}(p + q), \end{aligned}$$

wobei im 2. Schritt wieder in Unabhängigkeit der X_i benutzt wurde. Im folgenden soll der Erwartungswert von T bestimmt werden.

Lösungsweg 1: Es gilt weiterhin

$$P[T \geq n] \;=\; P[X_1 = 0, \ldots, X_{n-1} = 0] \;=\; \prod_{i=1}^{n-1} P[X_i = 0] \;=\; r^{n-1},$$

wobei im zweiten Schritt die Unabhängigkeit benutzt wurde. Daher erhält man für den Erwartungswert

$$E[T] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} P[T \geq n] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} r^n \;=\; \frac{1}{1 - r} \;=\; \frac{1}{p + q}.$$

Lösungsweg 2:

$$\begin{aligned} E[T] \;&=\; \sum_{n=1}^{\infty} n\, P[T = n] \;=\; (p + q) \sum_{n=1}^{\infty} n\, r^{n-1} \;=\; (p + q)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n \right) \\ &=\; (p + q)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{1}{1 - r} \right) \;=\; \frac{p + q}{(1 - r)^2} \;=\; \frac{1}{1 - r} \;=\; \frac{1}{p + q}. \end{aligned}$$

(iii) Betrachte zunächst einmal

$$\begin{aligned} P[T \leq n, X_T = 1] \;&=\; \sum_{k=1}^{n} P[T = k, X_T = 1] \;=\; \sum_{k=1}^{n} r^{k-1}\, p \;=\; p\, \frac{1 - r^n}{1 - r} \\ P[X_1 = 0, T \leq n, X_T = 1] \;&=\; \sum_{k=2}^{n} P[T = k, X_T = 1] \;=\; \sum_{k=2}^{n} r^{k-1}\, p \;=\; p\, r\, \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} \end{aligned}$$

Für die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die erste Runde unentschieden ausgeht, gegeben Spieler A gewinnt vor oder in der n-ten Runde, erhält man

$$P[X_1 = 0 \mid T \leq n, X_T = 1] \;=\; \frac{P[X_1 = 0, T \leq n, X_T = 1]}{P[T \leq n, X_T = 1]} \;=\; r\, \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r^n}.$$

(iv) Für die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A das Spiel gewinnt, gegeben das Spiel endet nach genau n Runden, gilt

$$P[X_T = 1 \mid T = n] \;=\; \frac{P[X_T = 1, T = n]}{P[T = n]} \;=\; \frac{r^{n-1}\, p}{r^{n-1}\,(p + q)} \;=\; \frac{p}{p + q}.$$

2. (Bedingte Wahrscheinlichkeiten)

a) Unter einem Wahrscheinlichkeitsraum versteht man ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bestehend aus einer Menge Ω, einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ und einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf Ω.

Eine σ-Algebra ist hierbei eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, die den folgenden Eigenschaften genügt

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Unter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf $(\Omega, \mathcal{A})$ versteht man eine Abbildung

$$P : \mathcal{A} \to [0,1], \qquad \mathcal{A} \ni A \mapsto P[A] \in [0,1]$$

mit den Eigenschaften, dass

(i) Normierung: $P[\Omega] = 1$

(ii) σ-Additivität: Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, d.h. es sei $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, gilt

$$P\Big[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i].$$

Es nun sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$ zwei Ereignisse, wobei $P[B] > 0$ ist. Dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B definiert durch

$$P[A \mid B] := \frac{P[A \cap B]}{P[B]}.$$

b) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $H_1, \ldots, H_n$ eine disjunkte Zerlegung der Menge Ω mit $P[H_i] > 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Weiterhin betrachte ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ mit $P[A] > 0$.

Zum Beweis der Bayesschen Formel gilt zunächst einmal

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} P[H_j] \cdot P[A \mid H_j] &= \sum_{j=1}^{n} P[H_j] \cdot \frac{P[A \cap H_j]}{P[H_j]} = \sum_{i=j}^{n} P[A \cap H_j] \\ &= P\Big[\bigcup_{j=1}^{n} A \cap H_j\Big] = P\Big[A \cap \bigcup_{j=1}^{n} H_j\Big] = P[A \cap \Omega] = P[A],\end{aligned}$$

wobei im ersten Schritt die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und im dritten Schritt die σ-Additivität benutzt wurde, da die Ereignisse $A \cap H_j$ disjunkt sind. Damit ergibt sich dann aber, dass

$$P[H_i \mid A] = \frac{P[H_i \cap A]}{P[A]} = \frac{P[H_i] \cdot P[A \mid H_i]}{P[A]} = \frac{P[H_i] \cdot P[A \mid H_i]}{\sum_{j=1}^{n} P[H_j] \cdot P[A \mid H_j]},$$

wobei im ersten und zweiten Schritt die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit benutzt wurde.

Da $P[H_1] = 0$ impliziert, dass auch $P[H_1 \cap A] = 0$ ist, ergibt sich somit

$$P[H_i \mid A] \;=\; \begin{cases} 0, & i = 1 \\ \dfrac{P[H_i] \cdot P[A \mid H_i]}{\sum_{j=2}^{n} P[H_j] \cdot P[A \mid H_j]}, & 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

c) Da sich das Zufallsexperiment durch ein 2-stufiges Modell beschreiben läßt, betrachte also einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, wobei $\Omega = \{0, \ldots, 5\} \times \{0, \ldots, 5\}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge auf Ω ist. Weiterhin bezeichnen die Zufallsvariablen

$$X_n : \Omega \to \mathbb{N}, \qquad \omega \;\mapsto\; X_n(\omega) = \omega_n \qquad \text{für} \qquad n = 1, 2$$

den Ausgang des n-ten Teilexperiments. Da nach Voraussetzung die Schachtel mit gleicher Wahrscheinlichkeit $0, 1, \ldots, 5$ rote Fahrkarten enthält, gilt folgtlich

$$P[X_1 = k] \;=\; \mu(k) \;=\; \frac{1}{6}.$$

Weiterhin werden die Fahrkarten ohne Zurücklegen gezogen. Somit ergibt sich für die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P[X_2 = l \,|\, X_1 = k] \;=\; p(k, l) \;=\; p_{\mathrm{Hyp}(3,5,k)}(l),$$

wobei $p_{\mathrm{Hyp}(3,5,k)}$ die hypergeometrische Verteilung zu den Parametern $m = 5$, $r = k$ und $n = 3$ ist. Betrachte nun das Ereignis, dass "2 rote und 1 grüne Fahrkarte" gezogen wurden, d.h. $\{X_2 = 2\}$.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass die Schachtel 3 rote Kugeln enthält gegeben das Ereignis $\{X_2 = 2\}$, ergibt sich aus der Bayesschen Formel

$$\begin{aligned} P[X_1 = 3 | X_2 = 2] \;&=\; \frac{P[X_1 = 3] \cdot P[X_2 = 2 \,|\, X_1 = 3]}{\sum_{k=2}^{4} P[X_1 = k] \cdot P[X_2 = 2 \,|\, X_1 = k]} \;=\; \frac{p(3, 2)}{\sum_{k=2}^{4} p(k, 2)} \\ &=\; \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{2}{2}\binom{3}{1} + \binom{3}{2}\binom{2}{1} + \binom{4}{2}\binom{1}{1}} \;=\; \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

d) Es sei S eine endliche Menge und μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $S \times S$ mit Gewichtsfunktion $\mu(x, y)$ für $x, y \in S$. Weiterhin setze für $y \in S \times S$

$$\mu_1(y_1 | y_2) \;:=\; \frac{\mu(y_1, y_2)}{\sum_{z \in S} \mu(z, y_2)}, \qquad \mu_2(y_2 | y_1) \;:=\; \frac{\mu(y_1, y_2)}{\sum_{z \in S} \mu(y_1, z)}.$$

Die Übergangsmatrix p eines Gibbs-Samplers zur Simulation einer Stichprobe von der Wahrscheinlichkeitsverteilung μ ist nun gegeben durch

$$p := p_2 \, p_1,$$

wobei für $x, y \in S \times S$ gilt

$$p_1(x, y) \;=\; \begin{cases} \mu_1(y_1 | y_2), & y_2 = x_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad p_2(x, y) \;=\; \begin{cases} \mu_2(y_2 | y_1), & y_1 = x_1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. (Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme)

a) Der Algorithmus des Jacobi-Verfahrens ist gegeben durch

Input: reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $b \in \mathbb{R}^d$, Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}^d$
Output: Lösung x von $A\,x = b$

for $k = 0, 1, 2, \dots$ **do**
  for $i = 1, 2, \dots, d$ **do**
    $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij}\, x_j^{(k)}\Big)$$
  end for
end for

b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Diese Matrix läßt sich nun zerlegen in $A = D - L - R$ mit

$$D \;=\; \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{dd}), \qquad -L \;=\; \operatorname{tril}(A, -1), \qquad -R \;=\; \operatorname{triu}(A, 1),$$

wobei D die Diagonalelemente, $-L$ die untere Dreiecksteil und $-R$ der obere Dreiecksteil der Matrix A ist.

Der Iterationsschritt des Jacobi-Verfahrens läßt sich damit nun folgendermaßen darstellen:

$$x^{(k+1)} \;=\; D^{-1}\big(b + (L+R)\,x^{(k)}\big) \;=\; D^{-1}(L+R)\,x^{(k)} + D^{-1}b \;=:\; T\,x^{(k)} + f,$$

d.h. $T = D^{-1}(L+R) = D^{-1}(D-A) = I - D^{-1}A$ und $f = D^{-1}b$.

c) Für eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist der Spektralradius $\varrho(T)$ definiert durch

$$\varrho(T) \;:=\; \max\big\{|\lambda| \;\big|\; \lambda \in \mathbb{C} \text{ ist Eigenwert von } T\big\}.$$

Es sei nun weiterhin $\|\cdot\|_V$ eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ sowie $\|\cdot\|_M$ eine mit $\|\cdot\|_V$ verträgliche Matrixnorm.

Zu zeigen: $\varrho(T) \;\leq\; \|T\|_M$.

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von T zum normierten Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$|\lambda| \;=\; |\lambda|\,\|v\|_V \;=\; \|\lambda\,v\|_V \;=\; \|T\,v\|_V \;\leq\; \|T\|_M\,\|v\|_V \;=\; \|T\|_M.$$

Dies impliziert aber, dass $\varrho(T) \leq \|T\|_M$ ist.

Sei nun A strikt diagonaldominant, d.h. $|a_{kk}| > \sum_{l\neq k} |a_{kl}|$ für alle $k = 1, \dots, d$. Dann gilt für die Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens

$$\varrho(T) \;\leq\; \|T\|_\infty \;=\; \|D^{-1}(L+R)\|_\infty \;=\; \max_{1\leq k\leq d} \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{d} \frac{|a_{kl}|}{|a_{kk}|} \;<\; 1,$$

wobei im letzten Schritt die strikte Diagonaldominanz der Matrix A benutzt wurde.

d) Der Iterationsschritt des relaxierten Jacobi-Verfahrens (JOR) ist gegeben durch

$$x_i^{(k+1)} \;=\; \frac{\omega}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij}\, x_j^{(k)} \Big) + (1-\omega)\, x_i^{(k)}, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,d.$$

Unter Verwendung der Bezeichnungen wie im *Aufgabenteil 3.b)* ergibt sich dann folgende Darstellung des Iterationsschritts im (JOR)

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \omega\, D^{-1} \big(b + (L+R)\, x^{(k)} \big) + (1-\omega)\, x^{(k)} \\ &= \omega\, D^{-1} (L+R)\, x^{(k)} + (1-\omega)\, x^{(k)} + \omega\, D^{-1}\, b \\ &= \omega\, D^{-1} (D-A)\, x^{(k)} + (1-\omega)\, x^{(k)} + \omega\, D^{-1}\, b \\ &= \omega\, x^{(k)} - \omega\, D^{-1} A\, x^{(k)} + (1-\omega)\, x^{(k)} + \omega\, D^{-1}\, b \\ &= (I - \omega\, D^{-1} A)\, x^{(k)} + \omega\, D^{-1}\, b \\ &=: T_\omega\, x^{(k)} + f. \end{aligned}$$

e) Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und $D = \operatorname{diag}(a_{11},\ldots,a_{dd})$. Die Tatsache, dass A positiv definit ist impliziert hierbei, dass die Elemente der Matrix D positiv sind, denn

$$a_{kk} \;=\; \big\langle e_k, A\, e_k \big\rangle \;>\; 0 \qquad \forall\, k = 1,\ldots,d.$$

Weiterhin ist das Produkt $D^{-1}A$ positiv definit, denn für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $x \neq 0$ gilt

$$\big\langle x, D^{-1} A\, x \big\rangle \;=\; \sum_{k=1}^{d} x_k\, \frac{1}{a_{kk}} \big(A\, x\big)_k \;\geq\; \Big(\min_{1\leq k\leq d} \frac{1}{a_{kk}} \Big) \big\langle x, A\, a \big\rangle \;>\; 0,$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, dass die Matrix A positive definite ist.

Es seien nun $\lambda_1,\ldots,\lambda_d$ die Eigenwerte der Matrix $D^{-1}A$ zu den Eigenvektoren $v_1,\ldots,v_d$. Damit ergibt sich dann für die Iterationsmatrix T des relaxierten Jacobi-Verfahrens (JOR) wegen

$$T\, v_k \;=\; \Big(\omega \big(I - D^{-1}A \big) + (1-\omega)\, I \Big)\, v_k \;=\; \big(\omega\, (1-\lambda_k) + (1-\omega) \big)\, v_k \;=:\; \mu_k\, v_k.$$

Daraus folgt dann aber

$$\begin{aligned} & -1 \;<\; \mu_k \;<\; 1 && \forall\, k = 1,\ldots,d \\ \Longleftrightarrow\quad & -2 \;<\; -\lambda_k\, \omega \;<\; 0 && \forall\, k = 1,\ldots,d \\ \Longleftrightarrow\quad & 0 \;<\; \omega \;<\; \frac{2}{\rho(D^{-1}A)}, && \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, dass die Eigenwerte $\lambda_k > 0$ sind für alle k.

4. (Splines)
Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $-\infty < a < b < \infty$, $f \in C^2([a,b])$ und für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta \;=\; \big\{ a, a+h, a+2\,h, \ldots, b \big\}, \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

eine äquidistante Unterteilung des Intervalls.

a) Die stückweise lineare, stetige Interpolation $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ der Funktion f bzgl. des Gitters Δ ist dann gegeben durch

$$s(x) \;=\; \frac{a+(i+1)\,h-x}{h}\, f\big(a+i\,h\big) \;+\; \frac{x-(a+i\,h)}{h}\, f\big(a+(i+1)\,h\big)$$

für $x \in [a+i\,h, a+(i+1)\,h]$ und $i = 0,\dots,n-1$.

b) Bezeichne weiterhin mit $P_\Delta([a,b])$ den Raum der stückweise konstanten Funktionen bzgl. Δ, d.h.

$$P_\Delta([a,b]) = \big\{ g : [a,b] \to \mathbb{R} \,\big|\, \forall\, i\ \exists\, c_i \in \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = c_i\ \forall\, x \in (a+i\,h, a+(i+1)\,h) \big\}.$$

Zu zeigen: $\big(f' - s', g\big)_{L^2([a,b])} \;=\; 0$ für alle $g \in P_\Delta([a,b])$.

Zunächst einmal gilt per Konstruktion, dass $s(x) = f(x)$ ist für alle $x \in \Delta$. Desweiteren gilt für ein beliebiges $g \in P_\Delta([a,b])$

$$\begin{aligned}
\big(f' - s', g\big)_{L^2([a,b])} &= \int_a^b \big(f'(x) - s'(x)\big)\, g(x)\, dx \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} c_i \int_{a+i\,h}^{a+(i+1)\,h} \big(f'(x) - s'(x)\big)\, dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \Big[f(x) - s(x) \Big]_{a+i\,h}^{a+(i+1)\,h} \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Da die Ableitung der Funktion für alle $x \in [a,b] \backslash \Delta$ existiert und zudem $s' \in P_\Delta([a,b])$ ist, ergibt sich somit, dass $\big(f' - s', s'\big)_{L^2([a,b])} = 0$ ist. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}
\big(f', f'\big)_{L^2([a,b])} &= \big(s' + (f' - s'), s' + (f' - s')\big)_{L^2([a,b])} \\
&= \big(s', s'\big)_{L^2([a,b])} + 2\,\big(f' - s', s'\big)_{L^2([a,b])} + \big(f' - s', f' - s'\big)_{L^2([a,b])} \\
&\geq \big(s', s'\big)_{L^2([a,b])} + 2\,\big(f' - s', s'\big)_{L^2([a,b])} \\
&= \big(s', s'\big)_{L^2([a,b])}.
\end{aligned}$$

c) Unter einem zu Δ gehörenden kubischen Spline s versteht man eine reelle Funktion $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

(1) $s \in C^2([a,b])$.

(2) Auf jedem Intervall $[a+i\,h, a+(i+1)\,h]$ stimmt s mit einem Polynom vom 3. Grad überein.

Weiterhin wird der Raum der kubischen Splines bzgl. des Gitters Δ mit $S_3(\Delta)$ bezeichnet, wobei $\dim(S_3(\Delta)) = n+3$ ist, da die $3+1+n-1$ linear unabhängigen Funktionen

$$1, x-a, (x-a)^2, (x-a)^3, \big((x-(a+h)) \vee 0\big)^3 \dots, \big((x-(a+(n-1)\,h)) \vee 0\big)^3$$

nämlich den Raum $S_3(\Delta)$ aufspannen.

d) Es sei nun $f \in C^2([a,b])$ eine periodische Funktion, d.h. $f(a) = f(b)$ und $f'(a) = f'(b)$, sowie $s \in S_3(\Delta)$ ein periodischer, kubischer Spline, der die Funktion f interpoliert, d.h. für alle $i = 0, \ldots, n-1$ gilt $s(a + i\,h) \;=\; f(a + i\,h)$ und

$$s'(a) = s'(b) \qquad \text{und} \qquad s''(a) = s''(b).$$

Zu zeigen: $\big(f'' - s'', l\big)_{L^2([a,b])} \;=\; 0$ für alle $l \in \{s \in S_1(\Delta) \,|\, s(a) = s(b)\}$.

Da die Funktion l stetig und stückweise linear ist, existiert die Ableitung dieser Funktion für alle $x \in [a,b] \setminus \Delta$ und $l' \in C_\Delta([a,b])$. Durch partielle Integration ergibt sich weiterhin

$$\begin{aligned}
\int_{a+i\,h}^{a+(i+1)\,h} \big(f'(x) - s'(x)\big)'\, l(x)\, dx \;&=\; \Big[\big(f'(x) - s'(x)\big)\, l(x)\Big]_{a+i\,h}^{a+(i+1)\,h} - c_i \Big[f(x) - s(x)\Big]_{a+i\,h}^{a+(i+1)\,h} \\
&=\; \Big[\big(f'(x) - s'(x)\big)\, l(x)\Big]_{a+i\,h}^{a+(i+1)\,h},
\end{aligned}$$

wobei im 2. Schritt benutzt wurde, dass die Funktion f und der Spline s auf den Gitterpunkten übereinstimmen. Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\big(f'' - s'', l\big)_{L^2([a,b])} \;&=\; \int_a^b \big(f''(x) - s''(x)\big)\, l(x)\, dx \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+i\,h}^{a+(i+1)\,h} \big(f'(x) - s'(x)\big)'\, l(x)\, dx \\
&=\; \sum_{i=0}^{n-1} \Big[\big(f'(x) - s'(x)\big)\, l(x)\Big]_{a+i\,h}^{a+(i+1)\,h} \;=\; \Big[\big(f'(x) - s'(x)\big)\, l(x)\Big]_a^b \\
&=\; 0,
\end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $l(a) = l(b)$, $f'(a) = f'(b)$ und $s'(a) = s'(b)$ ist. Dies impliziert nun aber, da s'' nach Voraussetzungen ein periodischer, linearer Spline ist, dass

$$\begin{aligned}
\big(f'', f''\big)_{L^2([a,b])} \;&=\; \big(s'' + (f'' - s''), s'' + (f'' - s'')\big)_{L^2([a,b])} \\
&=\; \big(s'', s''\big)_{L^2([a,b])} + 2\,\big(f'' - s'', s''\big)_{L^2([a,b])} + \big(f'' - s'', f'' - s''\big)_{L^2([a,b])} \\
&\geq\; \big(s'', s''\big)_{L^2([a,b])} + 2\,\big(f'' - s'', s''\big)_{L^2([a,b])} \\
&=\; \big(s'', s''\big)_{L^2([a,b])}.
\end{aligned}$$

e) Betrachte die lineare Abbildung

$$\Phi : S_3(\Delta) \to \mathbb{R}^{n+3}, \qquad s \;\mapsto\; \big(s(a), s(a+h), \ldots, s(b), s'(a) - s'(b), s''(a) - s''(b)\big).$$

Zu zeige: Φ ist bijektiv.

Zunächst einmal folgt aus $\Phi(s) = 0$, dass s den Randbedingungen (2) genügt und das Interpolationsproblem (1) zu $f \equiv 0$ löst. Aus *Aufgabenteil 4.d)* folgt daher

$$\int_a^b s''(x)^2\, dx \;\leq\; \int_a^b f''(x)^2\, dx \;=\; 0.$$

Da aber s'' stetig ist, folgt somit $s''(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Somit ist s affin. Aus der Bedingung $s(a) = s(b) = 0$ ergibt sich schließlich, dass $s \equiv 0$ ist. Damit ist nun gezeigt, dass die Abbildung Φ injektiv ist.

Wegen $\dim(S_3(\Delta)) = n + 3 = \dim(\mathbb{R}^{n+3})$ ist Φ sogar bijektiv.

Daher existiert zu gegebenen $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ genau ein $s \in S_3(\Delta)$, dass das Interpolationsproblem

$$s(a + i\,h) \;=\; y_i \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n$$

mit den periodischen Randbedingungen (2) löst.