Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2009
Andreas Eberle, Martin Slowik

10. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik II"

Abgabe bis Dienstag, 14 Uhr, vor der Mathematikbibliothek (LWK)

---

1. (Lagrange-Darstellung und Neville-Schema)
Die Polynome

$$L_i(x) \;:=\; \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (i = 0, 1, \dots n)$$

heißen Lagrange-Grundpolynome zu den vorgegebenen Stützstellen $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.
Zeigen Sie:

a) L_i löst das Interpolationsproblem zu den Stützstellen x_j und den Funktionswerten $y_j = \delta_{i,j}$, $j = 0, 1, \dots, n$.

b) Die eindeutige Lösung des Interpolationsproblems zu beliebigen Werten $y_j \in \mathbb{R}$ ist

$$p(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x).$$

c) Es gilt

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) \;=\; 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

d) Die Interpolationspolynome $p_{i,k}$ zu den Werten (x_j, y_j), $j = i, i+1, \dots, k$ erfüllen die Rekursionsformeln

$$p_{i,k}(x) = \frac{(x - x_i)p_{i+1,k}(x) - (x - x_k)p_{i,k-1}(x)}{x_k - x_i}$$

für alle $0 \leq i < k \leq n$ und $x \in \mathbb{R}$.

2. (Hermite-Interpolation)
Zu einer gegebenen Funktion $f \in C^{2n+2}(\mathbb{R})$ und den reellen Stützstellen $x_0 < \ldots < x_n$ sei ein Polynom p mit Höchstgrad $2n+1$ gesucht, weches die speziellen Hermiteschen Interpolationsbedingungen

$$p(x_k) \;=\; f(x_k), \qquad p'(x_k) \;=\; f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n \tag{1}$$

erfüllt.

a) Zeigen Sie, dass es genau ein solches Polynom gibt.

b) Beweisen Sie die Darstellung

$$p(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} U_k(x)\, f(x_k) + \sum_{k=0}^{n} V_k(x_k)\, f'(x_k)$$

mit

$$\begin{aligned} U_k(x) &= \big(1 - 2\,L_k'(x_k)\,(x - x_k)\big)\, L_k(x)^2 \\ V_k(x) &= (x - x_k)\, L_k(x)^2. \end{aligned}$$

c) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in [x_0, x_n]$ ein $\xi \in (x_0, x_n)$ existiert, so dass

$$f(x) - p(x) \;=\; \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\, w(x)^2,$$

wobei $w(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$ ist.

3. (Konvergenzordnung von Iterationsverfahren)

a) Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine p-mal stetig differenzierbare Funktion, $p \geq 2$, mit Fixpunkt x^*.
Zeigen Sie: Gilt $\frac{d^n\phi}{dx^n}(x^*) = 0$ für $n = 1, 2, \ldots, p-1$, dann existiert eine Umgebung U von x^*, so dass die Fixpunktiteration $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ für alle $x^{(0)} \in U$ mit Ordnung p gegen x^* konvergiert.

b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar mit einfacher Nullstelle ξ. Folgern Sie aus a), dass das Newton-Verfahren für alle Startwerte aus einer Umgebung von ξ quadratisch gegen ξ konvergiert.
Zeigen Sie weiter, dass das Iterationsverfahren

$$y^{(n)} \;=\; x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}, \qquad x^{(n+1)} \;=\; y^{(n)} - \frac{f(y^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

lokal gegen ξ konvergiert, und mindestens die Konvergenzordnung 3 besitzt.