Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2009
Andreas Eberle, Martin Slowik

9. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik II"

Abgabe bis Dienstag, 14 Uhr, vor der Mathematikbibliothek (LWK)

---

1. (Numerische Quadratur)
Zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$I[f] \;=\; \int_a^b f(x)\,dx$$

einer Funktion f auf einem "kleinen" Intervall $[a,b]$ kann man u.a. die *Trapezregel*

$$T_{[a,b]}[f] \;=\; \frac{b-a}{2}\cdot\big(f(a)+f(b)\big)$$

oder die *Simpsonregel*

$$S_{[a,b]}[f] \;=\; \frac{b-a}{6}\cdot\left(f(a)+4\,f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f(b)\right)$$

verwenden. Integrale über größere Intervalle berechnet man dann näherungsweise, indem man das Intervall zunächst in n Teilintervalle zerlegt und auf jedem der Teilintervalle die Trapez- bzw. Simpsonregel anwendet. Dies führt zur Approximation von $I[f]$ durch die *Trapezsumme*

$$T_n[f] \;=\; \frac{h}{2}\Big(f(a)+2\,f(x_1)+\ldots+2\,f(x_{n-1})+f(b)\Big)$$

mit $x_i = a + i\,h$ für $i = 0,\ldots,n$ und $h = \frac{b-a}{n}$ bzw. die *Simpsonsumme*

$$S_n[f] \;=\; \frac{h}{3}\Big(f(a)+4\,f(x_1)+2\,f(x_2)+4\,f(x_3)+\ldots+2\,f(x_{2\,n-2})+4\,f(x_{2\,n-1})+f(b)\Big)$$

mit $x_i = a + i\,h$ für $i = 0,\ldots,2\,n$ und $h = \frac{b-a}{2\,n}$. Zeigen Sie:

a) Die Trapezregel liefert für jedes Polynom 1. Grades den korrekten Wert des Integrals, die Simpsonregel sogar für jedes Polynom vom Grad ≤ 3.

b) Für die Trapez- bzw. Simpsonsumme gilt $T_n[f] \;=\; I[f]$ für jede Funktion f, die auf jedem der n Teilintervalle $[a+i/n, a+(i+1)/n]$ linear ist und $S_n[f] \;=\; I[f]$ für jede Funktion f, die auf jedem der n Teilintervalle ein Polynom vom Grad ≤ 3 ist.

c) Sei f zweimal stetig differenzierbar und $C \in (0,\infty)$ mit $|f''(x)| \leq C$ für alle $x \in [a,b]$. Leiten Sie eine Abschätzung für den Approximationsfehler $\big|T_n[f] - I[f]\big|$ her.

2. (Konvergenz des Newton-Verfahrens)
Diskutieren Sie die Konvergenz des Newton-Verfahrens für die Funktion

$$f(x) \;=\; x\,\mathrm{e}^{-x}$$

für alle (zulässigen) positiven Startwerte.

3. (cg-Verfahren)

a) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten α_k und β_k im cg-Verfahren auch wie folgt berechnet werden können:

$$\alpha_k \;=\; \frac{||r^{(k)}||^2}{\langle p^{(k)},\, A\,p^{(k)}\rangle} \qquad \beta_k \;=\; -\frac{||r^{(k+1)}||^2}{||r^{(k)}||^2}.$$

b) Zeigen Sie, dass die folgende Dreitermrekursion gilt:

$$A\,r^{(k)} \;=\; -\frac{1}{\alpha_k}\,r^{(k+1)} + \left(\frac{1}{\alpha_k} - \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}}\right) r^{(k)} + \frac{\beta_k}{\alpha_{k-1}}\,r^{(k-1)}.$$

4. (Revisionsaufgabe)
Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to S$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in einer abzählbaren Menge $S \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion.

a) Wann heißen die Zufallsvariablen unabhängig? Zeigen Sie: Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig, so auch $f(X_1), f(X_2), \ldots, f(X_n)$.

b) Wann heißen die Zufallsvariablen unkorreliert? Folgt aus der Unkorreliertheit von $X_1, X_2, \ldots, X_n$ auch die Unkorreliertheit von $f(X_1), f(X_2), \ldots, f(X_n)$?

c) Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S. Wie kann man $\theta = \sum_{x\in S} f(x)\mu(x)$ mit einem Monte-Carlo-Verfahren näherungsweise berechnen? Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die exponentiellen Momente

$$E\big[\exp(\lambda\,\hat{\theta}_n)\big], \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

des Monte-Carlo-Schätzers.

d) Wie kann man die Ergebnisse aus c) nutzen, um den Schätzfehler zu kontrollieren?