Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2009
Andreas Eberle, Martin Slowik

8. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik II"

Abgabe bis Dienstag, 14 Uhr, in der Mathematikbibliothek (LWK)

---

1. (Konvergenzkriterien für das Jacobi-Verfahren)
Zeigen Sie, dass das Jacobi-Verfahrens zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A\,x = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $a_{ii} \neq 0\ \forall 1 \leq i \leq d$ und $b \in \mathbb{R}$ konvergiert, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) Das starke Zeilensummenkriterium:

$$\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{d} |a_{kl}| \;<\; |a_{kk}|, \qquad \forall\, 1 \leq k \leq d.$$

b) Das starke Spaltensummenkriterium:

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{d} |a_{kl}| \;<\; |a_{ll}|, \qquad \forall\, 1 \leq l \leq d.$$

c) Das starke Quadratsummenkriterium:

$$\sum_{k=1}^{d} \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{d} \left| \frac{a_{kl}}{a_{kk}} \right|^2 \;<\; 1.$$

2. (Relaxiertes Jacobi-Verfahren)

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, und $b \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass das JOR-Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $A\,x = b$ konvergiert, wenn der Relaxationsparameter die Bedingung $0 < \omega < 2/\rho(D^{-1}A)$ erfüllt.

b) Für allgemeine invertierbare Matrizen A gilt: Wenn das Jacobi-Verfahren konvergiert, dann konvergiert auch das JOR-Verfahren für alle $0 < \omega \leq 1$.

3. (Optimierung von Iterationsverfahren)
Zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

betrachten wir das folgende Iterationsverfahren: Für einen beliebigen Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$x^{(k+1)} = T(\theta)\, x^{(k)} + g(\theta),$$

wobei $\theta \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter und

$$T(\theta) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\theta^2 + 2\theta + 1 & -2\theta^2 + 2\theta + 1 \\ -2\theta^2 + 2\theta + 1 & 2\theta^2 + 2\theta + 1 \end{pmatrix}, \qquad g(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Lösung von $A\,x = b$ ein Fixpunkt des Iterationsverfahrens ist.

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte für θ, für die das obige Verfahren konvergiert.

c) Berechnen Sie den optimalen Wert für θ, d.h. den Wert des Parameters, für den die Konvergenzgeschwindigkeit maximal ist.

4. (Revisionsaufgabe)

a) Formulieren und beweisen Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen.

b) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $E[X_i] = m$ und $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$. Es gelte
$$|\mathrm{Cov}(X_i, X_j)| \le r(|i-j|)$$
für eine Funktion $r : \mathbb{N} \to (0, \infty)$. Finden Sie Bedingungen für r, also Bedingungen für das Abklingen der Korrelationen, unter denen immer noch die Aussage des schwachen Gesetzes der großen Zahlen gilt.

P. (Jacobi- und Gauss-Seidel Verfahren) *(Abgabe beim Übungsgruppentutor)*
Lösen Sie das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrl}
10\,x_1 & - & x_2 & & & & & & & & & = 10 \\
-x_1 & + & 10\,x_2 & - & x_3 & & & & & & & = 10 \\
 & - & x_2 & + & 10\,x_3 & - & x_4 & & & & & = 0 \\
 & & & - & x_3 & + & 10\,x_4 & - & x_5 & & & = 10 \\
 & & & & & - & x_4 & + & 10\,x_5 & - & x_6 & = 0 \\
 & & & & & & & - & x_5 & + & 10\,x_6 & = 10
\end{array}$$

mithilfe des a) Jacobi Verfahrens und b) mittels des Gauss–Seidel Verfahrens.