Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2009
Andreas Eberle, Martin Slowik

7. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik II"

Abgabe bis Dienstag, 14 Uhr, in der Mathematikbibliothek (LWK)

---

1. (Heron–Verfahren)
Zur Berechnung der Quadratwurzel von positiven Zahlen benutzten wohl schon die Babylonier, spätestens aber der Alexandriner *Heron* (etwa 1. Jh. n. Chr.), das folgende Verfahren: Für beliebige reelle Startwerte $x^{(0)} > 0$ und reelles $a > 0$ setze

$$x^{(n+1)} \;=\; \frac{1}{2}\left(x^{(n)} + \frac{a}{x^{(n)}}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge $x^{(n)}$ für $x^{(0)} > \sqrt{a}$ monoton fallend und durch $\sqrt{a}$ nach unten beschränkt ist. Folgern Sie, daß die Folge in diesem Fall gegen $\sqrt{a}$ konvergiert. Was passiert für Startwerte $x^{(0)} \in (0, \sqrt{a})$?

b) Zeigen Sie weiter, dass das *Heron Verfahren* sogar quadratisch konvergiert, d.h. es existiert eine Konstante $C \in (0, \infty)$ mit

$$\left|x^{(n+1)} - \sqrt{a}\right| \;\le\; C \cdot \left|x^{(n)} - \sqrt{a}\right|^2 .$$

c) Führen Sie vier Iterationsschritte zur Berechnung von $\sqrt{2}$ aus. Wählen Sie dazu $x^{(0)} = 2$, und stellen Sie erst $x^{(4)}$ als Dezimalzahl dar. Schätzen Sie den Fehler ab.

2. (Fixpunktiteration mit Rundungsfehlern)
Sei $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine Abbildung, welche die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit einer Kontraktionskonstanten $L < 1$ erfülle. Bei der numerischen Implementation führen in der Regel Rundungsfehler dazu, dass die Fixpunktiteration $x^{(k)} = \phi(x^{(k-1)})$ nicht exakt ausgewertet werden kann. Statt $\phi(x)$ betrachten wir daher den gestörten Funktionswert $\phi(x) + r(x)$, wobei eine positive Konstante δ existiere mit $|r(x)| \le \delta \; \forall x \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass für die durch

$$\tilde{x}^{(0)} \;=\; x^{(0)}, \qquad \tilde{x}^{(k)} \;=\; \phi(\tilde{x}^{(k-1)}) + r(\tilde{x}^{(k-1)})$$

definierte gestörte Folge gilt:

$$|\tilde{x}^{(k)} - x^*| \;\le\; \frac{\delta}{1-L} + L^k\left(|x^{(0)} - x^*| - \frac{\delta}{1-L}\right) \qquad \text{für alle } k \ge 0,$$

wobei x^* der eindeutige Fixpunkt von ϕ ist.

3. (Metropolis–Hastings–Algorithmus)
Der Metropolis-Hastings-Algorithmus ist eine Erweiterung des Metropolis-Algorithmus auf nicht notwendig symmetrische Vorschlagsmatrizen. Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einer endlichen Menge S mit $\mu(x) > 0$ für alle $x \in S$, und $q(x,y),\ x,y \in S$ eine beliebige stochastische Matrix.

a) Zeigen Sie, dass durch

$$p(x,y) \;=\; q(x,y) \cdot \min\left(\frac{\mu(y)\,q(y,x)}{\mu(x)\,q(x,y)}, 1\right) \qquad \text{für } y \neq x$$

eine stochastische Matrix mit Gleichgewicht μ festgelegt wird.

b) Ist $q(x,y)$ symmetrisch und irreduzibel, und $\mu(x)$ nicht konstant, dann konvergiert jede Markovkette mit Übergangsmatrix p ins Gleichgewicht μ.

c) Wir betrachten nun einen anderen Spezialfall, bei dem die Vorschlagsverteilung $q(x,\,\cdot\,)$ für den nächsten Schritt der Markovkette nicht vom Ausgangspunkt x abhängt, d.h.

$$q(x,y) \;=\; \nu(y)$$

für eine feste Wahrscheinlichkeitsverteilung ν auf S. Die Markovkette mit Übergangsmatrix $p(x,y)$ heißt dann *Independence Sampler*, und liefert eine Alternative zum Acceptance-Rejection Verfahren. Geben Sie eine Abschätzung für den Variationsabstand zwischen der Verteilung des Independence Samplers nach n Schritten und dem Gleichgewicht μ.

4. (Zeitumkehr einer Markovkette)
Sei $X_0, \ldots, X_n$ eine Markovkette mit Übergangswahrscheinlichkeiten $p(x,y)$, die in einer Gleichgewichtsverteilung μ gestartet wird. Weiter sei $Y_0 := X_n, \ldots, Y_n := X_0$.
Zeigen Sie, dass $Y_0, \ldots, Y_n$ eine Markovkette mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\hat{p}(x,y) \;=\; \frac{\mu(y)\,p(y,x)}{\mu(x)}$$

und invarianter Verteilung μ ist. Wann gilt $\hat{p}(x,y) = p(x,y)$?

5. (Revisionsaufgabe)

a) Definieren Sie den Erwartungswert einer diskreten, reellwertigen Zufallsvariable. Zeigen Sie: Ist $X : \Omega \to S$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in einer abzählbaren Menge S, und $f : S \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative reellwertige Funktion, dann gilt

$$E[f(X)] \;=\; \sum_{a \in S} f(a)\,P[X = a].$$

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer Poisson(λ)-verteilten Zufallsvariable.