Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2009
Andreas Eberle, Martin Slowik

6. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik II"

Abgabe bis Dienstag, 14 Uhr, in der Mathematikbibliothek (LWK)

---

1. (Binomialmodell für Aktienkurse)
In einem einfachen Finanzmarktmodell wird angenommen, daß der Kurs S_n einer Aktie an einem Tag mit Wahrscheinlichkeit p um den Faktor $u > 1$ auf den Wert $u \cdot S_n$ steigt, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ um den Faktor $d < 1$ auf den Wert $d \cdot S_n$ fällt. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Kurses S_n nach n Tagen, wenn der Kurs bei $S_0 = 1$ startet.

2. (Korrelationskoeffizient)
Der Korrelationskoeffizient $\rho(X, Y)$ zweier diskreter Zufallsvariablen $X, Y \in \mathcal{L}^2$ mit $\sigma(X) \neq 0$ und $\sigma(Y) \neq 0$ ist definiert als

$$\rho(X, Y) \;=\; \frac{\mathrm{Cov}\,(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}.$$

a) Zeigen Sie:
$$|\rho(X, Y)| \;\leq\; 1 \tag{1}$$

b) Geben Sie Beipiele von Zufallsvariablen X, Y mit Werten in $\{0, 1\}$, deren Korrelationskoeffizient in folgenden Bereichen liegt: (i) $\rho(X, Y) = 1$, (ii) $\rho(X, Y) \in (0, 1)$, (iii) $\rho(X, Y) = 0$, (iv) $\rho(X, Y) \in (-1, 0)$, (v) $\rho(X, Y) = -1$.

c) Wann gilt Gleichheit in (1) ?

3. (Exponentielle Abschätzungen)

a) Sei X eine diskrete reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass für alle $c, t \geq 0$ gilt:
$$P[X \geq c] \;\leq\; e^{-ct}\, E\left[e^{tX}\right] .$$

b) Es seien nun $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige, Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $0 < p < 1$. Zeigen Sie, daß für $a, t \geq 0$ gilt:
$$P\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\right] \;\leq\; \mathrm{e}^{-nat}\, E\left[\mathrm{e}^{tX_1}\right]^n.$$
Beweisen Sie mithilfe dieser Abschätzung die Bernstein-Ungleichung
$$P\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq p + \varepsilon\right] \;\leq\; \mathrm{e}^{-2n\varepsilon^2} \qquad \text{für alle } \varepsilon \geq 0.$$

4. (Monte Carlo Schätzer)
Ein System besteht aus 20 unabhängigen Komponenten. Die i-te Komponente funktioniert mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} + \frac{i}{50}$. Sei X die Anzahl der funktionsfähigen Komponenten.

a) Entwickeln Sie ein Monte-Carlo Verfahren, um die Wahrscheinlichkeit

$$p := P[X \leq 5]$$

effektiv abzuschätzen.

b) Leiten Sie eine obere Schranke für die Varianz des von Ihnen verwendeten Monte-Carlo-Schätzers her. Wieviele Stichproben benötigen Sie, um mit 95 % Wahrscheinlichkeit einen relativen Fehler ≤ 10 % garantieren zu können ?

5. (Coupon Sammler)
Aus einer Urne mit n Kugeln werden mit Zurücklegen Kugeln gezogen, und zwar so lange, bis jede Kugel einmal gegriffen wurde. Sei T die Anzahl der nötigen Züge. Zeigen Sie

$$E[T] \;=\; n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) \;=\; O(n \log n)$$

Hinweis: Betrachten Sie dazu die Zufallsvariablen $1 = T_1 < T_2 < \cdots < T_n = T$, *die "Erfolgsmomente", zu denen eine vorher noch nicht gegriffene, neue Kugel gezogen wird. Was ist die Verteilung und der Erwartungswert von* $T_{i+1} - T_i$*? Wie bestimmt sich folglich der Erwartungswert von* T*?*