Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2009
Andreas Eberle, Martin Slowik

4. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik II”

Abgabe bis Dienstag, 14 Uhr, in der Mathematikbibliothek (LWK)

---

1. (Bandrika 1)
Du hast dich im Nationalpark von Bandrika verlaufen. Von den Besuchern im Park sind zwei Drittel Touristen. Fragen nach der Richtung werden von diesen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ richtig beantwortet. Dabei sind Antworten auf wiederholte Fragen unabhängig, auch wenn die Frage und die Person dieselben sind. Wenn man hingegen einen Bandrikaner fragt, ist die Antwort immer falsch.

a) Du fragst eine Person, ob der Ausgang sich in Richtung Osten oder Westen befindet. Als Antwort erhältst du Osten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das richtig ist?

b) Du fragst dieselbe Person nochmals und bekommst dieselbe Antwort. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, nun die richtige Antwort erhalten zu haben, $\frac{1}{2}$ beträgt.

c) Du richtest dieselbe Frage ein drittes Mal an dieselbe Person und erhältst wieder die Antwort Osten. Wie hoch ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort stimmt?

d) Ein viertes Mal wird der geduldige Passant von dir gefragt, doch die Antwort ist wieder Osten. Zeige, dass die Antwort mit Wahrscheinlichkeit $\frac{27}{70}$ richtig ist.

e) Zeige für den Fall, dass die vierte Antwort Westen wäre, dass die Richtung Osten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ zutrifft.

2. (Pflanzenzucht)
Ein Pflanzen-Gen besitze die beiden Allele A und a. Ein klassisches Verfahren zur Züchtung reinrassiger (d.h. homozygotischer) Pflanzen vom Genotyp AA bzw. aa ist die Selbstbefruchtung. Begründe, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(x, y) \;:=\; P\big[\,\text{Genotyp } y \text{ in Generation } n+1 \,|\, \text{Genotyp } x \text{ in Generation } n\,\big]$$

durch $p(Aa, AA) = p(Aa, aa) = 1/4$, $p(Aa, Aa) = 1/2$ und $P(aa, aa) = P(AA, AA) = 1$ gegeben sind. Berechne für beliebiges n die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit

$$p^n(Aa, Aa) \;=\; P\big[\, Aa \text{ in Generation } n \,|\, Aa \text{ am Anfang}\,\big].$$

3. (Polyas Urnenmodell)
Eine Urne enthält zur Zeit $n = 0$ je eine rote und eine schwarze Kugel. Vor jedem Zeitpunkt $n = 1, 2, 3, \ldots$ wird eine zufällig ausgewählte Kugel entnommen und zusammen mit einer neuen Kugel derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Sei $R_n(\omega)$ die Anzahl der roten Kugeln zur Zeit n. Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$p_{n,r} \;:=\; P[R_n = r], \qquad 1 \le r \le n+1$$

a) für die Fälle $n = 1, 2$ und 3,

b) für den allgemeinen Fall.

4. (Random Walk) . Sei P die Gleichverteilung auf

$$\Omega \;=\; \{-1,1\}^N \;=\; \{\omega = (x_1, \ldots, x_N) \,|\, x_i \in \{-1,+1\}\,\},$$

und $X_i(\omega) = x_i$. Wir interpretieren

$$S_n \;=\; X_1 + \ldots + X_n \qquad (n = 0, 1, \ldots, N)$$

als die zufällige Bewegung eines Teilchens auf $\mathbb{Z}$ mit Start in 0 (*random walk*). Für $\lambda \in \mathbb{N}$ sei

$$T_\lambda \;=\; \min\{n > 0 \;|\; S_n = \lambda\}$$

der Zeitpunkt des ersten Besuchs in λ. Zeigen Sie:

a) Die Verteilung von S_n ist gegeben durch

$$P[S_n = k] \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } n+k \text{ ungerade oder } |k| > n \\ 2^{-n}\binom{n}{(n+k)/2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Für jedes $c > 0$ gilt :

$$P[S_n = \lambda - c \text{ und } T_\lambda \le n] \;=\; P[S_n = \lambda + c] \qquad \text{,,\textit{Reflektionsprinzip}''.}$$

c) Für die Verteilung von T_λ gilt:

$$P[T_\lambda \le n] \;=\; P[S_n \ge \lambda] + P[S_n > \lambda].$$

*d) Folgern Sie

$$P[T_\lambda = n] \;=\; \frac{1}{2}(P[S_{n-1} = \lambda - 1] - P[S_{n-1} = \lambda + 1])\,.$$