Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2009
Andreas Eberle, Martin Slowik

2. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik II"

Abgabe bis Dienstag, 14 Uhr, in der Mathematikbibliothek (LWK)

---

1. (Spielprobleme)

a) Eine faire Münze wird n-mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlickeit, dass beim n-ten Wurf

   i) Kopf zum ersten mal eintritt.
   ii) die Anzahl von Kopf und Zahl gleich ist.
   iii) genau zweimal Kopf eingetreten ist.
   iv) mindestens zweimal Kopf eingetreten ist.

b) Chevalier de Méré wunderte sich einmal Pascal gegenüber, dass er beim Werfen mit 3 Würfeln die Augensumme 11 häufiger beobachtet hatte als die Augensumme 12, obwohl doch 11 durch die Kombinationen 6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3 und die Augensumme 12 durch genauso viele Kombinationen (welche?) erzeugt würden.

   Kann man die Beobachtung des Chevalier de Méré als "vom Zufall bedingt" ansehen oder steckt in seiner Argumentation ein Fehler? Führen Sie zur Lösung dieses Problems einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum ein.

2. (Bonferroni's Ungleichung)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$P\Big[\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big] \;\geq\; \sum_{i=1}^{k} P[A_i] - \sum_{1 \leq i < j \leq k} P[A_i \cap A_j].$$

   (Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Fälle $k = 2$ und $k = 3$).

b) In jeder Packung Corn Flakes befindet sich je eines von insgesamt n verschiedenen Bildern von Fußballspielern, darunter auch 11 Bilder von Spielern aus der Nationalmannschaft . Wer nun die Bilder aller 11 Nationalspieler gesammelt hat, gewinnt eine Reise zur Weltmeisterschaft. Um die Reise auf jeden Fall zu gewinnen, kauft Fred Feuerstein $3n$ Packungen.

   Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich die gewünschten Bilder zu erhalten, zwischen $1 - 11 \cdot (1 - \frac{1}{n})^{3n}$ und $1 - 11 \cdot (1 - \frac{1}{n})^{3n} + 55 \cdot (1 - \frac{2}{n})^{3n}$ liegt. Welchen Wert haben diese Schranken ungefähr für große n?

3. (Wartezeiten und Runs)

a) Bestimmen Sie die Verteilung der Wartezeit T auf die erste "Sechs" bei wiederholtem Würfeln.

b) In manchen Anwendungen möchte man testen, ob eine Bitfolge

$$\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$$

"rein zufällig" zustandekam oder nicht. Eine Kenngröße, mit der man quantifizieren kann, ob die Nullen und Einsen sehr gleichmäßig verteilt sind oder eher in wenigen Gruppen (runs) vorkommen, ist die Zahl

$$V(\omega) := |\{i \in \{2, \ldots, n\} : x_{i-1} \neq x_i\}| .$$

Beispielsweise ist $V((1,1,1,1,0,0,0,0)) = 1$ und $V((1,0,1,0,1,0,1,0)) = 7$.

Sei P die Gleichverteilung auf $\{0,1\}^n$. Zeigen Sie

$$P[V = k] \;=\; 2^{1-n} \binom{n-1}{k} .$$

c) Bestimmen Sie $V(\omega)$ für die beiden Folgen aus der Vorlesung, und eine von Ihnen selbst erstellte "möglichst zufällige" Folge. Wie können Sie beurteilen, ob die Folgen hinsichtlich der Runs echten Zufallsfolgen ähnlich sind ?

4. (Summen mit positiven Summanden)
Für eine abzählbare Menge A und reelle Zahlen $p(\omega) \geq 0,\ \omega \in A$, definieren wir

$$\sum_{\omega \in A} p(\omega) \;:=\; \sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i),$$

wobei $\omega_1, \omega_2, \ldots$ eine beliebige Abzählung von A ist. Zeigen Sie:

a) $\sum_{\omega \in A} p(\omega)$ ist wohldefiniert, und es gilt

$$\sum_{\omega \in A} p(\omega) \;=\; \sup_{\substack{F \subseteq A \\ F \text{ endlich}}} \sum_{\omega \in F} p(\omega).$$

b) Für jede disjunkte Zerlegung $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gilt

$$\sum_{\omega \in A} p(\omega) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_i} p(\omega).$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, daß A endlich ist.

P. (Zufallsexperimente mit Mathematica: Würfeln II) .
Diese Aufgabe finden Sie als Mathematica-Notebook auf der Vorlesungshomepage
http://www.uni-bonn.de/~eberle/AlMa09/AlMa09.html