Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2009
Andreas Eberle, Nikolaus Schweizer

4. Programmierprojekt zur AlMa II

Abgabe bis 9.7. im CIP-Pool

P. (Adaptive Simpson-Quadratur)
Wir betrachten die *Simpsonregel*

$$S_{[a,b]}[f] \;=\; \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4\,f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b) \right)$$

zur numerischen Integration einer Funktion $f \in C[a,b]$. Bei der *summierten Simpson-Regel* wird das Intervall $[a,b]$ zunächst in n Teilintervalle $[a+i(b-a)/n, a+(i+1)(b-a)/n]$ zerlegt, und auf jedem dieser Teilintervalle die Simpson-Regel angewendet (siehe Übungsblatt 9).

Aufgabe: Programmieren Sie

a) die summierte Simpson-Regel unter Verwendung von n Teilintervallen. Es bezeichne S_k die Simpsonnäherung zu $n = 2^k - 1$, $k \geq 0$. Berechnen Sie $S_1, S_2, \ldots$ und verwenden Sie S_{k_0} als endgültige Näherung, wenn $|S_{k_0} - S_{k_0-1}| < \varepsilon_1$ (Abbruchkriterium), wobei die Toleranz $\varepsilon_1 > 0$ vorgegeben sei.

b) das folgende *adaptive* Verfahren:

(1) Gib eine Toleranz $\varepsilon_1 > 0$ vor.
(2) Berechne die Simpson-Näherung S_1 auf dem Intervall $[a,b]$, also zu den Stützstellen $a, \frac{a+b}{2}, b$.
(3) Berechne die Simpson-Näherungen S_{21} und S_{22} auf den Teilintervallen $[a, \frac{a+b}{2}]$ bzw. $[\frac{a+b}{2}, b]$.
(4) Falls $|S_1 - (S_{21} + S_{22})| < \varepsilon_1$, verwende $S_{21} + S_{22}$ als Näherung für $\int_a^b f(x)dx$.
(5) Andernfalls wiederhole die Schritte (2)-(4) getrennt auf den Teilintervallen $[a, \frac{a+b}{2}]$ und $[\frac{a+b}{2}, b]$ mit der jeweiligen Fehlerschranke $\varepsilon_2 := \frac{\varepsilon_1}{2}$ (2. Stufe).

Auf der n-ten Stufe wird entsprechend das zu (4) analoge Abbruchkriterium mit $\varepsilon_n := \frac{\varepsilon_1}{2^{n-1}}$ verwendet. Beachte, dass die benötigte Stufenzahl n dabei auf den einzelnen Teilintervallen unterschiedlich sein kann ("Adaptivität").

Testen Sie die Programme aus a) und b) anhand der Beispiele

$$\int_0^{10} e^x\,dx, \quad \int_0^1 \sqrt{x}\,dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+0.0001}\,dx, \quad \int_{-6}^6 e^{-30(x-2)^2}\,dx$$

und verwenden Sie als (Anfangs-)Toleranz $\varepsilon_1 = 10^{-4}, 10^{-6}$. Geben Sie auf jeder Verfeinerungsstufe den Näherungswert und die Anzahl der benötigten Stützstellen an. Plotten Sie die Menge der im adaptiven Verfahren verwendeten Stützstellen. Vergleichen Sie mit den von Mathematica berechneten Werten der Integrale.