Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 2022/23
Adrien Schertzer, Sid Maibach

Klausur „Stochastik"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte legen Sie den Studierendenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis gut sichtbar neben Ihren Platz!
- Abgabe bis spätestens 11.00 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4			**Summe**	**Note**
Punkte								
Maximal	32	30	18	20			100	

1. (Zufallsvariablen und Gesetz der großen Zahlen) [*10 + 6 + 6 + 10 Punkte*]
Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine abzählbare Teilmenge der reellen Zahlen.

a) Geben Sie eine kurze, aber vollständige Definition der folgenden Begriffe:

   (i) σ-Algebra $\mathcal{A}$,

   (ii) Wahrscheinlichkeitsverteilung P,

   (iii) Zufallsvariable X mit Werten in S,

   (iv) Die Kovarianz von X und Y für X,Y in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

b) Leiten Sie folgende Aussagen aus der definition einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ her:

   (i) Sind A_1, $A_2 \ldots \in \mathcal{A}$, dann folgt $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$,

   (ii) Sind A, $B \in \mathcal{A}$, dann folgt $A \cap B \in \mathcal{A}$.

c) Sei $Z : \Omega \to S$ eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Erwartungswert 0. Beweisen Sie die Ungleichung

$$P\left[|Z| \geq c\right] \;\leq\; \frac{E(Z^2)}{c^2} \qquad \text{für alle } c \in (0, \infty).$$

d) Seien $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to S$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Erwartungswert 0 und Varianz $v \in (0, \infty)$:

   (i) Schreiben Sie $\mathrm{Var}(\frac{S_n}{n})$ als eine Funktion der Kovarianzen.

   (ii) Falls $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to S$ unkorrelierte Zufallsvariablen sind, formulieren und beweisen Sie in diesem Rahmen eine Version des Gesetzes der großen Zahlen.

2. (Diskrete und Absolutstetige Verteilungen) [*8 + 12 + 10 Punkte*]

a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Verteilung $\mu_X(B) = P[X \in B]$, $B \in \mathcal{B}$.

   i) Wann nennt man die Verteilung diskret und wann absolutstetig?

   ii) Gib ein Beispiel für eine Verteilung die weder diskret noch absolutstetig ist.

b) Seien X und Y unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Berechne den Erwartungswert und die Varianz folgender Zufallsvariablen:

   i) X^2

   ii) $\frac{X+Y}{2}$

   iii) e^X

c) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} |\sin(x)| & x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & x < -\pi \text{ oder } x > \pi. \end{cases}$$

   i) Finde ein $\lambda > 0$, so dass $f_Z(x) = \lambda f(x)$ eine absolutstetige Zufallsvariable Z definiert.

   ii) Berechne den Erwartungswert und die Varianz von Z.

3. (Gemeinsame Verteilungen) [*6 + 12 Punkte*]

a) Sind $X_1 : \Omega \to S_1, X_2 : \Omega \to S_2, \ldots, X_n : \Omega \to S_n$ diskrete Zufallsvariablen, dann ist auch $(X_1, \ldots, X_n)$ eine diskrete Zufallsvariable mit Werten im Produktraum $S_1 \times \cdots \times S_n$.

(i) Definieren Sie die Massenfunktion der gemeinsamen Verteilung.

(ii) Wie sieht die Massenfunktion aus, falls die Zufallsvariablen unabhängig sind.

b) Es sei $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und P die Gleichverteilung auf Ω. Wir definieren Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$X(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad Y(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die Massenfunktionen der Verteilung von X, der Verteilung von Y, und der gemeinsamen Verteilung von X und Y unter P.

(ii) Beweisen oder widerlegen Sie, dass X und Y unabhängig sind.

(iii) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X + Y]$ und $\mathrm{Var}[X + Y]$.

4. (Markov-Ketten) [*4 + 4 + 4 + 4 + 4 Punkte*]

Sei S eine endliche Menge, ν eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S, und $\pi = (\pi(x,y))_{x,y \in S}$ eine stochastische Matrix.

a) Definieren Sie eine zeitlich homogene Markov-Kette mit Startverteilung ν und Übergangsmatrix π.

b) Definieren Sie die Gleichgewichtsverteilung μ der Übergangsmatrix π.

c) Wie lautet die Detailed Balance-Bedingung für μ bzgl. der Übergangsmatrix π?

d) Zeigen Sie: Wenn μ die Detailed Balance-Bedingung erfüllt, dann ist μ eine Gleichgewichtsverteilung von π.

e) Angenommen $\pi(x,y) = \pi(y,x)$ für alle $(x,y) \in S^2$, geben Sie eine Gleichgewichtsverteilung μ der Übergangsmatrix π an.

1) a) Skript

b) (i) $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i^c \right)^c$

$A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow A_i^c \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ σ-Algebra)

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i^c \in \mathcal{A}$ (")

$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i^c \right)^c \in \mathcal{A}$ (")

(ii) $A \cap B = \underbrace{A \cap B \cap \Omega \cap \Omega \cap \ldots}_{\in \mathcal{A}}$ (sehe $\Omega \in \mathcal{A}$ und (i))

c) $E(|Z|^2) \overset{\text{Lin.}}{=} E\Big(\underbrace{|Z|^2}_{\geq c^2} \mathbb{1}_{\{|Z| \geq c\}}\Big) + \underbrace{E\left(|Z|^2 \mathbb{1}_{\{|Z| < c\}}\right)}_{\geq 0}$

$\Rightarrow E(|Z|^2) \overset{\text{Monotonie + Lin.}}{\geq} c^2 E(\mathbb{1}_{\{|Z| \geq c\}}) = c^2 \mathbb{P}(|Z| \geq c)$. (Monotonie)

d) (i) $\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mathrm{cov}\left(\frac{S_n}{n}, \frac{S_n}{n}\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=} \frac{1}{n^2} \mathrm{cov}(S_n, S_n)$

$= \frac{1}{n^2} \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$

$= \frac{v}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$

(ii) $\forall c > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 0\right| \geq c\right) \overset{\text{c) und } E(S_n)=0}{\leq} \frac{E\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right)}{c^2} = \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{c^2}$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq c\right) \overset{\text{d(i)} + \mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0 \ \forall i \neq j}{\leq} \frac{v}{nc^2} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq c\right) = 0 \ \forall c > 0.$

2) a) Skript

b) i) $E(X^2) = 1$ (Def.)

$$E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{x e^{-x^2/2}}^{\uparrow} \underbrace{x^3}_{\downarrow} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\overset{\text{P.I.} + \left[x^3 e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0}{=} \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx = 3\,E(X^2) = 3$$

$$\Rightarrow Var(X^2) = E(X^4) - E(X^2)^2 = 3 - 1 = 2$$

(ii) $$E\left(\frac{X+Y}{2}\right) \overset{\text{Lin.}}{=} \frac{E(X) + E(Y)}{2} = 0$$

$$Var\left(\frac{X+Y}{2}\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=} \frac{1}{4} Var(X+Y) \overset{\text{Unab.}}{=} \frac{1}{4}\left(Var(X) + Var(Y)\right) = \frac{1}{2}$$

(iii) $$E(e^X) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\right)}_{=1} e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$E((e^X)^2) = E(e^{2X}) \overset{\text{wieder}}{=} e^{\frac{4}{2}} = e^2$$

$$\Rightarrow Var(X) = e^2 - (e^{\frac{1}{2}})^2 = e^2 - e$$

c) i) $f \geq 0$, so wir suchen λ, $\lambda \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\,dx = 1$

Aber $$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\,dx \overset{|\sin(x)|\text{ gerade}}{=} 2\int_0^{\pi} \sin(x) = 2\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$$

ii) Sei Z eine Z.V. mit Dichte f_Z

$$E(Z) = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{z}{4}|\sin(z)|}_{\text{Ungerade}}\,dz = 0$$

P.I. $\begin{cases} u = z^2 & v' = \sin(z) \\ u' = 2z & v = -\cos(z) \end{cases}$

$$E(Z^2) = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{z^2|\sin(z)|}{4}}_{\text{gerade}}\,dz = \frac{2}{4}\int_0^{\pi} z^2 \sin(z)\,dz = \frac{1}{2}\left[-z^2\cos(z)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} z\cos(z)\,dz$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + \int_0^\pi z\cos(z)\,dz \overset{\text{P.I.}}{=} \begin{cases} u = z & v' = \cos(z) \\ u' = 1 & v = \sin(z) \end{cases}$$

$$\frac{\pi^2}{2} + \underbrace{\left[z\sin(z)\right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \sin(z)\,dz$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + \left[\cos(z)\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} - 2$$

$$\Rightarrow Var(Z) = E(Z^2) = \frac{\pi^2}{2} - 2$$

3) a) Skript

b) (i)

$\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}$ $\qquad \mathbb{P}_{X,Y}(0,0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) = \mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$ $\qquad \mathbb{P}_{X,Y}(0,1) = \mathbb{P}(X=0, Y=1) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{6}$ $\qquad \mathbb{P}_{X,Y}(1,0) = \mathbb{P}(X=1, Y=0) = \mathbb{P}(\{3,5\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(Y=0) = \frac{5}{6}$ $\qquad \mathbb{P}_{X,Y}(1,1) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{6}$

(ii) X und Y sind nicht unabhängig, da

$$\mathbb{P}_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \mathbb{P}_X(0)\,\mathbb{P}_Y(0)$$

(iii) $E(X+Y) \overset{\text{Lin.}}{=} E(X) + E(Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$$E((X+Y)^2) = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \underbrace{2\,\mathbb{P}(X=1, Y=1)}_{=\frac{2}{6}} = 1$$

$$\Rightarrow Var(X+Y) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}.$$

4) a) b) c) d) Skript

e) Die Gleichverteilung μ auf S ist eine Gleichgewichtsverteilung der Übergangsmatrix Π, da $\mu(x) = \mu(y) = \frac{1}{|S|}$ und es folgt

$$\mu(x) \cdot \Pi(x,y) = \mu(y) \cdot \Pi(y,x)$$

$\overset{(d)}{\Rightarrow}$ μ eine Gleichgewichtsverteilung von Π.