Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2022/23
Adrien Schertzer, Sid Maibach

9. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag den 08.12, 18 Uhr im Postfach „Stochastik für Lehramt" oder auf eCampus.

---

1. (Exponentielle Abschätzungen)

a) Sei X eine diskrete reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass für alle $c, t \geq 0$ gilt:

$$P[X \geq c] \;\leq\; e^{-ct}\, E\left[e^{tX}\right].$$

b) Es seien nun $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P[X_i = 1] = p$ und $P[X_i = 0] = 1 - p$, $0 < p < 1$. Zeigen Sie, dass für $a, t \geq 0$ gilt:

$$P\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\right] \;\leq\; \mathrm{e}^{-nat}\, E\left[\mathrm{e}^{tX_1}\right]^n.$$

Beweisen Sie mithilfe dieser Abschätzung die Bernstein-Ungleichung

$$P\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq p + \varepsilon\right] \;\leq\; \mathrm{e}^{-2n\varepsilon^2} \qquad \text{für alle } \varepsilon \geq 0.$$

2. (Asymptotische Unabhängigkeit) Jeder von n Punkten werde mit Wahrscheinlichkeit λ/n grün, und mit Wahrscheinlichkeit μ/n rot gefärbt, unabhängig von den anderen Punkten. Sei G die Anzahl der grün gefärbten ud R die Anzahl dr rot gefärten Punkte. Zeigen Sie:

a) Die Zufallsvariale (G, R) hat eine Tronomial-Verteilung mit Parametern $n, \lambda/n, \mu/n$ und $1 - (\lambda + \mu)/n$, d.h. es gilt

$$P[G = g, R = r] = \frac{n!}{g!r!(n-g-r)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^g \left(\frac{\mu}{n}\right)^r \left(1 - \frac{\lambda + \mu}{n}\right)^{n-g-r}$$

Insbesondere sind G und R nicht unabhängig.

b) Im Grenzwert $n \to \infty$ sind G und R asymptotisch unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern λ und μ.

3. (Zufällige Polynome) Seien U, V Zufallsvariablen mit Werten in $\{-1, 1\}$, deren gemeinsame Verteilung bestimmt ist durch

$$P[U = 1] \;=\; P[U = -1] \;=\; \frac{1}{2}\,, \qquad \text{und}$$
$$P[V = 1|U = 1] \;=\; P[V = -1|U = -1] \;=\; \frac{1}{3}\,.$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Polynom $x^2 + Ux + V$ mindestens eine reelle Nullstelle?

b) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert der größeren Nullstelle von x^2+Ux+V gegeben es gibt mindestens eine reelle Nullstelle.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Polynom $x^2 + (U + V)x + U + V$ mindestens eine reelle Nullstelle?

4. (Coupon Sammler) Aus einer Urne mit n Kugeln werden mit Zurücklegen Kugeln gezogen, und zwar so lange, bis jede Kugel einmal gegriffen wurde. Sei T die Anzahl der nötigen Züge. Zeigen Sie:

$$E[T] \;=\; n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \;=\; O(n \log n).$$

Hinweis: Betrachten Sie dazu die Zufallsvariablen $1 = T_1 < T_2 < \cdots < T_n = T$*, die ,,Erfolgsmomente", zu denen eine vorher noch nicht gegriffene, neue Kugel gezogen wird. Was ist die Verteilung und der Erwartungswert von* $T_{i+1} - T_i$*? Wie bestimmt sich folglich der Erwartungswert von* T*?*