Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2022/23
Adrien Schertzer, Sid Maibach

8. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag den 01.12, 18 Uhr im Postfach „Stochastik für Lehramt" oder auf eCampus. Für Aufgabe 5 gibt es 5 Bonuspunkte.

---

1. (Ziehen ohne Zurücklegen) Es werden zwei Spielkarten nacheinander aus einem Skatblatt mit 32 Karten gezogen. Seien X und Y die Zufallsvariablen, die den Ausgang des ersten und zweiten Zuges beschreiben.

a) Geben sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an und definieren Sie die beiden Zufallsvariablen X und Y.

b) Sind X und Y unabhängig?

c) Betrachten Sie die Ereignisse $A :=$ "die erste Karte ist ein Bube" und $B :=$ "die zweite Karte ist Karo". Sind diese beiden Ereignisse unabhängig?

2. (Gemeinsame Verteilungen) Es sei $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω. Wir definieren Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$X(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad Y(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Massenfunktionen der Verteilung von X, der Verteilung von Y, und der gemeinsamen Verteilung von X und Y unter $\mathbb{P}$.

b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass X und Y unabhängig sind.

c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X + Y]$ und $\mathrm{Var}[X + Y]$.

3. (Der zweite Erfolg)

a) Seien S und T zwei unabhängige, zum Parameter $p \in (0, 1)$ geometrisch verteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Verteilung von $S + T$.

b) Für eine Folge unabhängiger Münzwürfe mit einer gezinkten Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ "Kopf" anzeigt, sei T_2 die Wartezeit auf den zweiten Wurf mit "Kopf". Bestimmen Sie die Verteilung von T_2 auf zwei verschiedene Arten.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von T_2.

4. (Gemeinsame Verteilungen beim Würfeln) Seien X und Y die Augenzahlen beim Werfen zweier Würfel, und seien $N = \min(X, Y)$, $M = \max(X, Y)$ und $S = X + Y$.

a) Bestimmen Sie die Verteilungen von N und S.

b) Bestimmen Sie die gemeinsamen Verteilungen von

(i) X und N, (ii) N und M, (iii) M und S,

und stellen Sie diese tabellarisch dar.

c) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen N, M und S.

d) Führen Sie das Zufallsexperiment 100 Mal durch, und bestimmen Sie die gemeinsame empirische Verteilung von X und Y.

5. (Unabhängigkeit und Zahlentheorie, Bonusaufgabe) Sei $s > 1$. Die *Riemannsche Zeta–Funktion* ist definiert durch

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Sei X auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und Verteilung

$$P[X = n] = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}.$$

Sei E_m das Ereignis "X ist teilbar durch m". Zeigen Sie:

a) Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $P[E_m] = m^{-s}$.

b) Die Ereignisse E_p, wobei p eine Primzahl ist, sind unabhängig.

c) Berechnen Sie $P\big[\bigcap_{p \text{ Primzahl}} E_p^c\big]$, und folgern Sie die *Eulersche Formel*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \text{ Primzahl}} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big).$$