Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2022/23
Adrien Schertzer, Sid Maibach

7. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag den 24.11, 18 Uhr im Postfach „Stochastik für Lehramt" oder auf eCampus.

---

1. (Endliche Markovketten) Wir betrachten eine zeithomogene Markovkette (X_n) auf $\{1, 2, 3\}$ mit Startwert $x_0 \in \{1, 2, 3\}$ und Übergangsmatrix

$$\pi := \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Untersuchen Sie die Asymptotik der Verteilung der Markovkette für $n \to \infty$.

b) Wie groß ist die asymptotische relative Häufigkeit der Besuche der Markovkette im Zustand 1 ?

2. (Gleichgewichte von Markovketten) Sei π die Übergangsmatrix einer Markovkette $X_0, X_1, X_2, \ldots$ auf einem endlichen Zustandsraum S. Zeigen Sie:

a) Ist die Startverteilung μ ein Gleichgewicht für π, dann gilt $X_k \sim \mu$ für alle Zeitpunkte.

b) Erfüllt μ die *detailled balance* Bedingung,

$$\mu(x)\pi(x, y) = \mu(y)\pi(y, x) \qquad \text{für alle } x, y \in S,$$

dann ist μ ein Gleichgewicht.

c) Bestimmen Sie ein Gleichgewicht der Markovkette auf $S := \{0, 1\}^3$ mit Übergangsmatrix

$$\pi(x, y) := \begin{cases} 1/3 & \text{falls } |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3| = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. (Thomas Bayes in Bandrika) Thomas Bayes befindet sich auf seiner Bandrika-Reise genau in der Situation, wie Sie in *Aufgabe 3 vom 6. Übungsblatt*. Im Gegensatz zu Ihnen geht er jedoch davon aus, dass die Antwort Osten mit Wahrscheinlichkeit ε korrekt ist. Zeigen Sie:

a) Egal welche Antwort Tom auf seine erste Frage bekommt, glaubt er weiterhin, dass die Antwort Osten mit Wahrscheinlichkeit ε richtig ist.

b) Sind die ersten beiden Antworten identisch (OO oder WW), so glaubt Tom immer noch, dass die Antwort Osten mit Wahrscheinlichkeit ε richtig ist.

c) Nach drei gleichen Antworten beurteilt Tom die Situation folgendermaßen:

$$P\big[\,\text{Osten ist korrekt}\,|\,\text{OOO}\,\big] \;=\; \frac{9\varepsilon}{11-2\varepsilon}, \quad P\big[\,\text{Osten ist korrekt}\,|\,\text{WWW}\,\big] \;=\; \frac{11\varepsilon}{9+2\varepsilon}$$

4. (Zufällige Summen mit zufälliger Summandenzahl)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $N : \Omega \to \mathbb{Z}_+$ eine Zufallsvariable mit Erwartungswert m_1 und Varianz v_1. Zeigen Sie:

a) Für den Erwartungswert $E[Y]$ einer (diskreten) reellwertigen Zufallsvariable Y auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gilt

$$E[Y] \;=\; \sum_{P[N=k]\neq 0} E[Y|N=k]\cdot P[N=k]\;.$$

Hinweis: Die bedingte Erwartung gegeben $N = k$ ist der Erwartungswert bzgl. der bedingten Verteilung, d.h. $E[Y|N=k] \;=\; \sum_{a\in Y(\Omega)} a\cdot P[Y=a|N=k]$.

b) Sind $X_1, X_2, \ldots$ von N unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit festem Erwartungswert m_2 und Varianz v_2, dann hat die zufällige Summe

$$S_N(\omega) \;:=\; X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega)$$

den Erwartungswert $E[S_N] = m_1 m_2$ und die Varianz $\mathrm{Var}[S_N] = m_1 v_2 + m_2^2 v_1$.