Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2022/23
Adrien Schertzer, Sid Maibach

5. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag den 10.11, 18 Uhr im Postfach „Stochastik für Lehramt".

---

1. (Glücksspiele)

a) Ihnen wird folgendes Spiel angeboten: Sie dürfen eine faire Münze (Zahl/Kopf) 5 mal werfen. Erscheint in jedem Wurf Kopf, so gewinnen Sie 35€. Erscheint in genau 4 Würfen Kopf, so werden Ihnen 12€ ausbezahlt und fällt genau drei mal Kopf bekommen Sie immerhin noch 6€. Würden Sie dieses Spiel für einen Einsatz von 5€ pro Spiel einen ganzen Abend lang spielen?

b) Beim Spiel *chuck-a-luck* leistet ein Spieler einen Euro Einsatz, nennt eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 6$ und wirft dann drei faire Würfel. Zeigt mindestens einer der Würfel seine Zahl, so erhält er den Einsatz zurück und außerdem für jeden Würfel, der seine Zahl zeigt noch einen zusätzlichen Euro. Erscheint die genannte Zahl nicht, so verfällt der Einsatz. Es heißt, der Bankvorteil bei diesem Spiel betrüge 7,9%. Bestätigen sie dies indem sie ein Stochastisches Modell aufstellen und den erwarteten Gewinn der Bank ausrechnen.

2. (Erwartungswert von positiven Zufallsvariablen mit ganzzahligen Werten)

a) Sei T eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{Z}_+$. Zeigen Sie, dass

$$E[T] \; = \; \sum_{k=1}^{\infty} P[T \geq k].$$

b) Berechnen Sie, wieviele Würfe im Schnitt nötig sind, bis beim Würfeln mit einem fairen Würfel zum ersten Mal eine 6 fällt.

Hinweis: Die zufallsvariable T_6 welche die Anzahl der Würfe bis zur ersten 6 beschreibt is geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{1}{6}$.

3. (Münzwürfe)

a) Zeigen Sie, dass die Varianz einer diskreten reellwertigen Zufallsvariable X mit $E[|X|] < \infty$ durch

$$\mathrm{Var}[X] \; = \; E[X^2] - E[X]^2 \qquad \text{gegeben ist.}$$

b) Zehn Personen sitzen in einem Kreis, und jeder wirft eine faire Münze. Sei N die Anzahl der Personen, deren Münze die gleiche Seite wie die Münzen beider Nachbarn zeigt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P[N = 9]$ und $P[N = 10]$, sowie den Erwartungswert $E[N]$.

c) Berechnen Sie die Varianz $\mathrm{Var}[N]$.

d) Eine Münze zeigt ,,Kopf" mit Wahrscheinlichkeit p. Sei π_n die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl von ,,Kopf" nach n Würfen gerade ist. Zeigen Sie, dass

$$\pi_{n+1} \;=\; (1-p)\pi_n \;+\; p(1-\pi_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, und berechnen Sie π_n.

4. (Geburtenverteilung) Angenommen, die Gesamtzahl G der Geburten pro Woche in einem Krankenhaus ist Poissonverteilt mit Parameter λ. Weiterhin sei jede Geburt, unabhängig von anderen Geburten und von der Gesamtzahl der Geburten, mit Wahrscheinlichkeit p ein Junge, und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ ein Mädchen. Wir beschreiben die Anzahl der pro Woche geborenen Jungen bzw. Mädchen durch Zufallsvariablen J und M.

a) Zeigen Sie

$$P[J = j, M = m] \;=\; \frac{(\lambda p)^j \mathrm{e}^{-\lambda p}}{j!} \cdot \frac{(\lambda q)^m \mathrm{e}^{-\lambda q}}{m!}.$$

b) Folgern Sie, dass J und M unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern λp bzw. λq sind.