

## 4. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt“

Abgabe bis Donnerstag den 03.11, 18 Uhr im Postfach „Stochastik für Lehramt“.

---

**1. (Erwartungswerte beim Würfeln)** Geben Sie geeignete Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen an, und berechnen sie die Verteilungen und Erwartungswerte für

- die Augenzahl beim Werfen eines fairen Würfels,
- die minimale Augenzahl beim Werfen von zwei fairen Würfeln,
- das Produkt der Augenzahlen beim Werfen von drei fairen Würfeln.

**2. (Zufallsstichproben mit und ohne Zurücklegen)** Eine Prüfung besteht aus 20 Fragen, die mit *ja* oder *nein* zu beantworten sind. Sie gilt bei mindestens 10 richtigen Antworten als bestanden.

- Ein Student kreuzt auf gut Glück die Antworten an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er die Prüfung?
- Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn er 5 Fragen mit Sicherheit beantworten kann und nur den Rest zufällig ankreuzt?
- Falls er gar nichts weiß, wäre es dann für ihn günstiger, zufällig 10-mal *ja* und 10-mal *nein* anzukreuzen, vorausgesetzt, dass für 10 Fragen die richtige Antwort *ja* lautet? **Genauere formulierung:** Nehmen sie an, dass für 10 der Fragen die Lösung *ja* lautet. Is es wahrscheinlicher zu bestehen durch 1) bei jeder frage unabhängig zufällig *ja* oder *nein* zu antworten oder 2) 10 Antworten mit *ja* zufällig über die Fragen zu verteilen (und die anderen mit *nein* zu beantworten)?

**3. (Geburten)** Im 18. Jahrhundert wurden in London in 82 aufeinander folgenden Jahren mehr Jungen als Mädchen geboren. Da Jungen und Mädchen mit ungefähr (aber nicht genau) gleicher Wahrscheinlichkeit geboren werden, scheint das ein sehr unwahrscheinliches Ereignis zu sein, das der göttlichen Vorsehung zugeschrieben wurde. Ist das wirklich so? Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass jede Geburt unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit  $p = 0.485$  ein Mädchen ergibt (und vernachlässigen Sie die Möglichkeit von Zwillingen usw.).

- a) Zeigen Sie: die Wahrscheinlichkeit, dass in  $2n$  Geburten mehr Mädchen als Jungen geboren werden ist nicht größer als

$$\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \frac{1-p}{1-2p}.$$

- b) Angenommen, in 82 aufeinander folgenden Jahren werden jedes Jahr 20.000 Kinder geboren. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass in jedem Jahr mehr Jungen als Mädchen geboren werden ist mindestens 0,99.

*Hinweis: Sie können die Stirlingsche Formel benutzen:*

$$1 \leq \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} \leq e^{1/(12n)}.$$

#### 4. (Binomial-Approximation der Hypergeometrischen Verteilung)

- a) Geben Sie die Massenfunktionen der Binomialverteilung mit Parametern  $n$  und  $p$  und der hypergeometrischen Verteilung mit Parametern  $n$ ,  $m$  und  $r$  an (Bezeichnungen wie in der Vorlesung).
- b) Zeigen Sie: Für  $m \rightarrow \infty$  und  $r \rightarrow \infty$  mit  $p = \frac{r}{m}$  konstant konvergiert die hypergeometrische Verteilung gegen die Binomialverteilung mit Parametern  $n$  und  $p$ .
- c) Interpretieren Sie diese Aussage.