Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2022/23
Adrien Schertzer, Sid Maibach

3. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag den 27.10, 18 Uhr im Postfach „Stochastik für Lehramt".

Geben Sie bei den stochastischen Modellierungsaufgaben den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum genau an, und leiten Sie die Aussagen aus den Modellannahmen her !

1. (Münzwürfe)
Eine faire Münze wird n mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlickeit, dass beim n-ten Wurf

a) Kopf zum ersten mal eintritt,

b) die Anzahl von Kopf und Zahl gleich ist,

c) genau zweimal Kopf eingetreten ist,

d) mindestens zweimal Kopf eingetreten ist.

2. (Bonferroni's Ungleichung und das Sammelbilderproblem)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ Ereignisse.

a) Zeigen Sie, dass

$$P\Big[\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big] \;\geq\; \sum_{i=1}^{k} P[A_i] - \sum_{1\leq i<j\leq k} P[A_i \cap A_j].$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Fälle $k = 2$ und $k = 3$. Im allgemeinen Fall kann man die Aussage zum Beispiel mit vollständiger Induktion zeigen.

b) In jeder Packung Corn Flakes befindet sich je eines von insgesamt n verschiedenen Bildern von Fußballspielerinnen, darunter auch 11 Bilder von Spielerninnen der Damen Nationalmannschaft. Wer nun die Bilder aller 11 Nationalspielerinnen gesammelt hat, gewinnt eine Reise zum Pokal Finale. Um die Reise auf jeden Fall zu gewinnen, kauft eine Person $3n$ Packungen.

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich die gewünschten Bilder zu erhalten, zwischen $1 - 11 \cdot (1 - \frac{1}{n})^{3n}$ und $1 - 11 \cdot (1 - \frac{1}{n})^{3n} + 55 \cdot (1 - \frac{2}{n})^{3n}$ liegt. Welchen Wert haben diese Schranken ungefähr für große n?

3. (Rechenregeln für Ereignisse)
Es seien $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse auf Ω, $n \in \mathbb{N}$, sowie X und Y diskrete Zufallsvariablen auf Ω. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen jeweils *in Kurzform*.

a) Falls $\mathbb{P}[A_1] = \mathbb{P}[A_2] = 1$, dann gilt auch $\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = 1$.

b) Falls $\mathbb{P}[A_1] = \mathbb{P}[A_2] = 1/2$, dann gilt auch $\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = 1/2$.

c) Es gelte $A_1 \subset A_2$ mit strikter Inklusion, d.h. $A_2 \setminus A_1 \neq \emptyset$. Dann gilt $\mathbb{P}[A_1] < \mathbb{P}[A_2]$.

d) Es gelte $\mathbb{P}[A_1] > 0$. Dann ist $(A_1, \mathbb{Q})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $\mathbb{Q}[A] := \mathbb{P}[A]/\mathbb{P}[A_1]$ für alle Teilmengen A von A_1.

e) Es gelte $\mathbb{P}\big[A_i \cap A_j\big] = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$. Dann ist

$$\mathbb{P}\big[A_1 \cup \cdots \cup A_n\big] = \mathbb{P}[A_1] + \cdots + \mathbb{P}[A_n].$$

f) Falls X und Y dieselbe Verteilung besitzen, dann gilt $\mathbb{P}[X = Y] = 1$.

g) Falls $\mathbb{P}[X = Y] = 1$, dann besitzen X und Y dieselbe Verteilung.

h) Es gelte $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ und $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$. Dann ist $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

4. (σ-Algebren)

a) Geben Sie alle auf der Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$ möglichen σ-Algebren an.

b) Finden Sie jeweils die kleinste σ-Algebra auf Ω, welche $\mathcal{M}$ enthält:

i) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{M} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$.
ii) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{M} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$.
iii) $\Omega = \{0, 1\}^4$, $\mathcal{M} = \{\{\omega \in \Omega : \omega_1 = 1\}, \{\omega \in \Omega : \omega_2 = 1\}\}$.
iv) $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{M} = \{\{x\} : x \in [0, 1]\}$.