Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2022/23
Adrien Schertzer, Sid Maibach

14. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag den 26.01, 18 Uhr im Postfach „Stochastik für Lehramt" oder auf eCampus. Für dieses Blatt gibt es 20 Punkte.

---

1. (Von der geometrischen Verteilung zur Exponentialverteilung) Sei X_p eine Zufallsvariable mit $P[X_p = k] = (1-p)p^k$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zeigen Sie, dass im Grenzwert $p \to 1$ die Verteilungsfunktion der reskalierten Zufallsvariablen

$$Y_p \ := \ (1-p)X_p$$

punktweise gegen die Verteilungsfunktion der Exp(1)-Verteilung konvergiert.

2. (Endliche Markovketten) Wir betrachten zeithomogene Markovketten (X_n) und (Y_n) auf $\{1,2,3\}$ mit Startwert $x_0 \in \{1,2,3\}$ und Übergangsmatrizen

$$\pi := \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \sigma := \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

a) Untersuchen Sie die Asymptotik der Verteilungen der Markovketten für $n \to \infty$.

b) Wie groß ist die asymptotische relative Häufigkeit der Besuche der Markovkette im Zustand 1 ?

3. (Totale Variationsdistanz) Sei S eine abzählbare Menge und $WV(S)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf S. Zeige, dass für $\mu, \nu \in \mathrm{WV}(S)$ und

$$B = \{x \in S : \mu(x) \geq \nu(x)\}$$

gilt, dass

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) = \sum_{x \in B}(\mu(x) - \nu(x)) = \max_{A \subseteq S} |\mu(A) - \nu(A)|,$$

wo d_{TV} die totale Variationsdistanz ist (Siehe Skript, Definition 3.17).

4. (Random Walk) Sei P die Gleichverteilung auf $\Omega = \{-1,+1\}^N$ und $X_i(\omega) = \omega_i$. Wir interpretieren

$$S_0 \ := \ 0 \quad \text{und} \quad S_n \ := \ X_1 + \ldots + X_n, \qquad n = 1, \ldots, N,$$

als zufällige Irrfahrt eines Teilchens auf $\mathbb{Z}$ mit Start in 0. Für $\lambda \in \mathbb{N}$ sei

$$T_\lambda \ = \ \min\{n > 0 \mid S_n = \lambda\}$$

der Zeitpunkt des ersten Besuchs in λ. Zeigen Sie, dass

a) die Verteilung von S_n gegeben ist durch

$$P[S_n = k] \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } n+k \text{ ungerade oder } |k| > n, \\ 2^{-n}\binom{n}{(n+k)/2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) das Reflexionsprinzip gilt, d.h. für jedes $c > 0$ erhält man:

$$P[S_n = \lambda - c,\, T_\lambda \le n] \;=\; P[S_n = \lambda + c].$$

c) die Verteilung von T_λ gegeben ist durch:

$$P[T_\lambda \le n] \;=\; P[S_n \ge \lambda] + P[S_n > \lambda].$$