Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2022/23
Adrien Schertzer, Sid Maibach

13. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag den 19.01, 18 Uhr im Postfach „Stochastik für Lehramt" oder auf eCampus. Für dieses Blatt gibt es 20 Punkte.

---

1. (Berechnung von Erwartungswerten und Dichten)

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und die Varianz $\mathrm{Var}[X]$ in den folgenden Fällen:

(i) X ist gleichverteilt auf $[0, 1]$.

(ii) X ist exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$.

(iii) $X = e^Z$ für eine $N(0, 1)$-verteilte Zufallsvariable Z.

(iv) Die Verteilung von X ist absolutstetig mit Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

2. (Gaußsche partielle Integration) Sei X eine zentrierte normalverteilte Zuafallsvariable mit varianze $\sigma^2 > 0$.

a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare funktion. Beweisen Sie unter geeigneten Wachstumsbedingungen für $g(x)$ bei $|x| \to \infty$ die partielle Integrationsformel

$$\mathbb{E}[Xg(X)] = \mathrm{Var}[X]\mathbb{E}[g'(X)]$$

b) Berechnen sie mithilfe von a) die Momente $\mathbb{E}[X^n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. (Wartezeiten) Eine Folge von Ereignissen trete zu zufälligen Zeitpunkten ein. Wir nehmen an, dass die Anzahl der Ereignisse, die sich bis zur Zeit $t > 0$ ereignen, durch eine Poisson(λt)-verteilte Zufallsvariable N_t beschrieben wird, wobei $\lambda > 0$ ein fester Parameter ist. (Wofür und weshalb ist das eine sinnvolle Modellierungsannahme ?)

a) Sei T_k der Zeitpunkt, zu dem das k-te Ereignis eintritt. Zeigen Sie: T_k ist eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_k(t) \;=\; 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \qquad t \geq 0.$$

b) Folgern Sie, dass die Verteilung von T_k absolutstetig ist mit Dichte

$$f_k(t) \;=\; \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\, t^{k-1} e^{-\lambda t}\, 1_{(0,\infty)}(t).$$

c) Skizzieren Sie die Graphen der Dichten für $k = 0, 1, 2, 3$. Was fällt auf?

4. (Momentenerzeugende Funktion) Die *momenterzeugende Funktion* einer reellen Zufallsvariable X ist definiert durch

$$M(t) = \mathbb{E}[exp(tX)] \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion in den folgenden Fällen:

(i) X ist binomialverteilt zu den Parametern (n, p),

(ii) X ist exponentialverteilt zum Parameter λ,

(iii) X ist $N(m, \sigma^2)$ verteilt.

b) Wie kann man die Momente $\mathbb{E}[X^n]$ berechnen, wenn man die Funktion $M(t)$ kennt?