



## 12. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt“

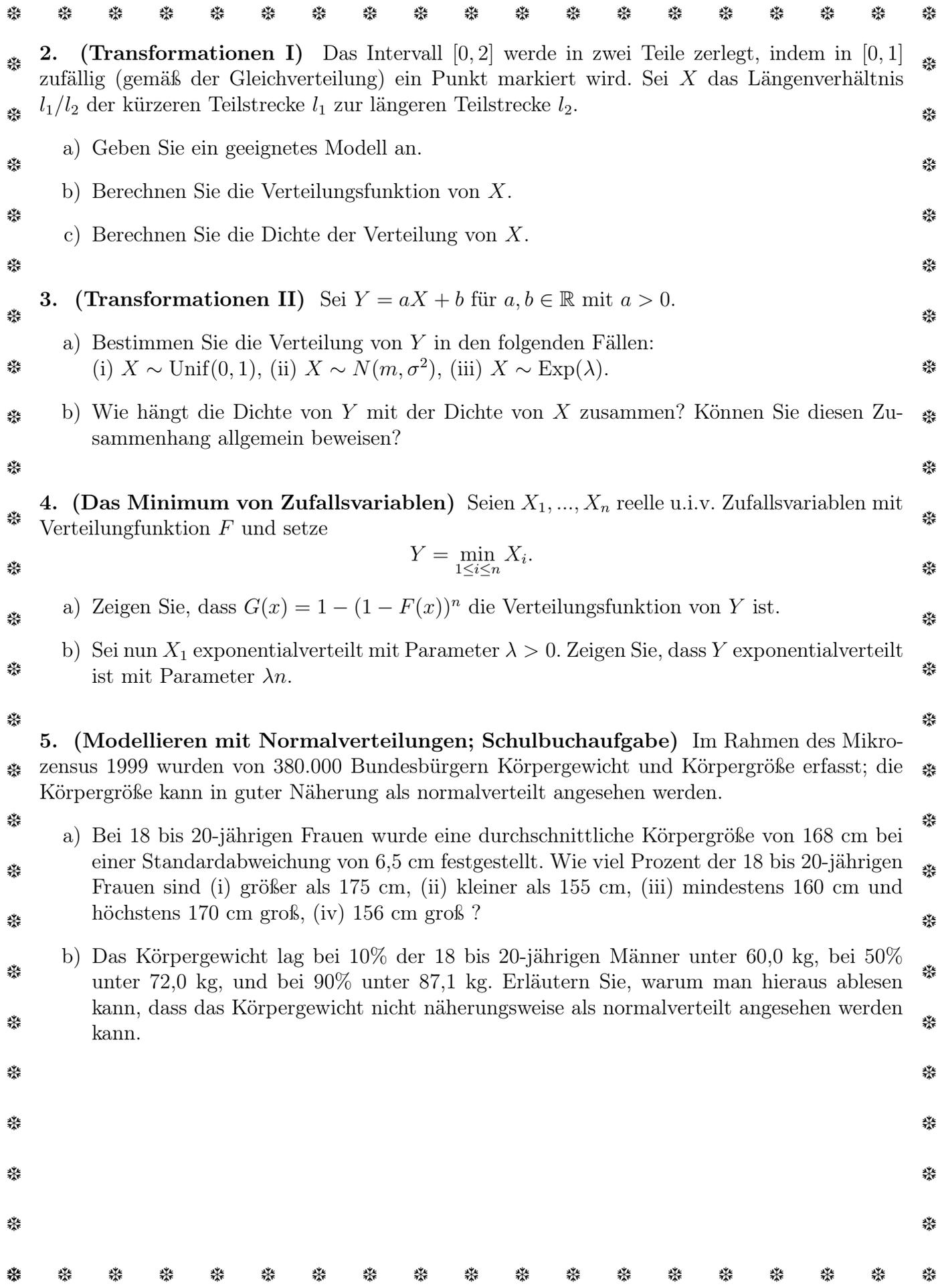
Abgabe bis Donnerstag den 12.01, 18 Uhr im Postfach „Stochastik für Lehramt“  
oder auf eCampus. Für dieses Blatt gibt es 30 Punkte.

Wir wünschen euch frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!

### 1. (Zufallsvariablen und ihre Verteilung)

- a) Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable. Wie sind die Verteilung und die Verteilungsfunktion von  $X$  definiert? Wann nennt man die Verteilung absolutstetig? Wie hängen die Verteilungsfunktion und die Dichte in diesem Fall zusammen?
- b) Sind die Verteilungen der folgenden Zufallsvariablen absolutstetig? Skizzieren Sie die Graphen der Verteilungsfunktionen, sowie, im absolutstetigen Fall, die Graphen der Dichten (mit Beschriftung der Koordinatenachsen):
  - (i)  $U \sim \text{Unif}(-1, 3)$ ,
  - (ii)  $X \sim N(1, 0.01)$ ,
  - (iii)  $Y = B \cdot Z$  mit  $B, Z$  unabhängig,  $Z \sim N(0, 1)$ ,  $P[B = 0] = P[B = 1] = 1/2$ ,
  - (iv)  $W = (2B - 1) \cdot Z$  mit  $B, Z$  wie in (iii).
- c) Sei  $A$  der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Radius Exp(1)-verteilt ist. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte der Verteilung von  $A$ .





**2. (Transformationen I)** Das Intervall  $[0, 2]$  werde in zwei Teile zerlegt, indem in  $[0, 1]$  zufällig (gemäß der Gleichverteilung) ein Punkt markiert wird. Sei  $X$  das Längenverhältnis  $l_1/l_2$  der kürzeren Teilstrecke  $l_1$  zur längeren Teilstrecke  $l_2$ .

- a) Geben Sie ein geeignetes Modell an.
- b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von  $X$ .
- c) Berechnen Sie die Dichte der Verteilung von  $X$ .

**3. (Transformationen II)** Sei  $Y = aX + b$  für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$ .

- a) Bestimmen Sie die Verteilung von  $Y$  in den folgenden Fällen:  
(i)  $X \sim \text{Unif}(0, 1)$ , (ii)  $X \sim N(m, \sigma^2)$ , (iii)  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ .
- b) Wie hängt die Dichte von  $Y$  mit der Dichte von  $X$  zusammen? Können Sie diesen Zusammenhang allgemein beweisen?

**4. (Das Minimum von Zufallsvariablen)** Seien  $X_1, \dots, X_n$  reelle u.i.v. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $F$  und setze

$$Y = \min_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

- a) Zeigen Sie, dass  $G(x) = 1 - (1 - F(x))^n$  die Verteilungsfunktion von  $Y$  ist.
- b) Sei nun  $X_1$  exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ . Zeigen Sie, dass  $Y$  exponentialverteilt ist mit Parameter  $\lambda n$ .

**5. (Modellieren mit Normalverteilungen; Schulbuchaufgabe)** Im Rahmen des Mikrozensus 1999 wurden von 380.000 Bundesbürgern Körpergewicht und Körpergröße erfasst; die Körpergröße kann in guter Näherung als normalverteilt angesehen werden.

- a) Bei 18 bis 20-jährigen Frauen wurde eine durchschnittliche Körpergröße von 168 cm bei einer Standardabweichung von 6,5 cm festgestellt. Wie viel Prozent der 18 bis 20-jährigen Frauen sind (i) größer als 175 cm, (ii) kleiner als 155 cm, (iii) mindestens 160 cm und höchstens 170 cm groß, (iv) 156 cm groß ?
- b) Das Körpergewicht lag bei 10% der 18 bis 20-jährigen Männer unter 60,0 kg, bei 50% unter 72,0 kg, und bei 90% unter 87,1 kg. Erläutern Sie, warum man hieraus ablesen kann, dass das Körpergewicht nicht näherungsweise als normalverteilt angesehen werden kann.



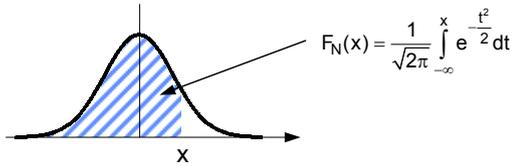
6. (Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion) Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  und sei  $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f_\lambda(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(2-x)x & \text{falls } 0 \leq x < 2, \\ \frac{1}{3}(x-2) & \text{falls } 2 \leq x < 3, \\ \frac{1}{3}e^{-\lambda(x-3)} & 3 \leq x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie  $\lambda \in \mathbb{R}$  so, dass  $f_\lambda$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf  $\mathbb{R}$  ist. Rechnen Sie mit diesem Wert weiter!
- b) Geben Sie die zugehörige Verteilungsfunktion  $F_\lambda$  an.
- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dass eine  $F_\lambda$ -verteilte Zufallsvariable  $X$  zwischen 2 und 5 liegt.



## Tabelle der Standardnormalverteilung ( $\mu = 0, \sigma = 1$ )



Ablesebeispiel:  $F_N(2,36) = 0,990863$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,500000	0,503989	0,507978	0,511967	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,10	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345
0,20	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,30	0,617911	0,621719	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,40	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,50	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405
0,60	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,70	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,80	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267
0,90	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1,00	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,10	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,878999	0,881000	0,882977
1,20	0,884930	0,886860	0,888767	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,30	0,903199	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736
1,40	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888
1,50	0,933193	0,934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,60	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,70	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959071	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,80	0,964070	0,964852	0,965621	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,90	0,971284	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705
2,00	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691
2,10	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738
2,20	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989
2,30	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576
2,40	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613
2,50	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201
2,60	0,995339	0,995473	0,995603	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427
2,70	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365
2,80	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074
2,90	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605
3,00	0,998650	0,998694	0,998736	0,998777	0,998817	0,998856	0,998893	0,998930	0,998965	0,998999
3,10	0,999032	0,999064	0,999096	0,999126	0,999155	0,999184	0,999211	0,999238	0,999264	0,999289
3,20	0,999313	0,999336	0,999359	0,999381	0,999402	0,999423	0,999443	0,999462	0,999481	0,999499
3,30	0,999517	0,999533	0,999550	0,999566	0,999581	0,999596	0,999610	0,999624	0,999638	0,999650
3,40	0,999663	0,999675	0,999687	0,999698	0,999709	0,999720	0,999730	0,999740	0,999749	0,999758
3,50	0,999767	0,999776	0,999784	0,999792	0,999800	0,999807	0,999815	0,999821	0,999828	0,999835
3,60	0,999841	0,999847	0,999853	0,999858	0,999864	0,999869	0,999874	0,999879	0,999883	0,999888
3,70	0,999892	0,999896	0,999900	0,999904	0,999908	0,999912	0,999915	0,999918	0,999922	0,999925
3,80	0,999928	0,999930	0,999933	0,999936	0,999938	0,999941	0,999943	0,999946	0,999948	0,999950
3,90	0,999952	0,999954	0,999956	0,999958	0,999959	0,999961	0,999963	0,999964	0,999966	0,999967
4,00	0,999968	0,999970	0,999971	0,999972	0,999973	0,999974	0,999975	0,999976	0,999977	0,999978
4,10	0,999979	0,999980	0,999981	0,999982	0,999983	0,999983	0,999984	0,999985	0,999985	0,999986
4,20	0,999987	0,999987	0,999988	0,999988	0,999989	0,999989	0,999990	0,999990	0,999991	0,999991
4,30	0,999991	0,999992	0,999992	0,999993	0,999993	0,999993	0,999993	0,999994	0,999994	0,999994
4,40	0,999995	0,999995	0,999995	0,999995	0,999995	0,999996	0,999996	0,999996	0,999996	0,999996
4,50	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999998	0,999998	0,999998