Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2022/23
Adrien Schertzer, Sid Maibach

11. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag den 22.12, 18 Uhr im Postfach „Stochastik für Lehramt" oder auf eCampus.

---

1. (Unabhängigkeit und Unkorelliertheit)
Seien X und Y Zufallsvariablen mit Werten in $\{-1, 1\}$.

a) Es gelte

$$\begin{aligned} P[X = 1, Y = 1] &= a, \quad & P[X = 1, Y = -1] &= b, \\ P[X = -1, Y = 1] &= c, \quad & P[X = -1, Y = -1] &= d. \end{aligned}$$

Wann sind X und Y unkorelliert bzw. unabhängig ? Geben Sie jeweils notwendige und hinreichende Bedingungen an die Koeffizienten a, b, c, d der Massenfunktion der gemeinsamen Verteilung an.

b) Seien nun X und Y unabhängig und gleichverteilt. Zeigen Sie, dass die drei Zufallsvariablen $X, Y, X \cdot Y$ paarweise unabhängig sind. Sind sie auch unabhängig?

2. (Verteilungsfunktionen I) Sei X eine reellwertige (nicht notwendigerweise absolutstetige) Zufallsvariable. Wir definieren die Funktion $F_X \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ durch

$$F_X(x) := \mathbb{P}[X \leq x].$$

Beweisen Sie, dass F_X eine Verteilungsfunktion ist, d.h. dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

a) F_X ist monoton wachsend, d.h. $F_X(x) \leq F_X(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$.

b) F_X ist rechtsstetig, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ und jede monoton fallende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert, gilt $F_X(x) = \lim_{n\to+\infty} F_X(x_n)$.

c) Es gilt $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

Zeigen Sie weiterhin die nachfolgenden Relationen.

d) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$.

e) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{P}[X = x] = F_X(x) - F_X(x-)$, wobei $F_X(x-) := \lim_{y \uparrow x} F_X(y)$.[1]

3. (Verteilungsfunktionen II)

a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Verteilungsfunktion

$$F(c) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } c < -1, \\ 1-p & \text{für } -1 \le c < 0, \\ 1-p+\frac{1}{2}cp & \text{für } 0 \le c \le 2, \\ 1 & \text{für } c > 2. \end{cases}$$

Berechne die Wahrscheinlichkeiten $P[X = -1]$, $P[X = 0]$ und $P[X \ge 1]$.

b) Sei nun F die Verteilungsfunktion einer beliebigen reellwertigen Zufallsvariable X. Bestimme die Verteilungsfunktionen der folgenden Zufallsvariablen in Abhängigkeit von F:

$$X^+ \;=\; \max(X, 0), \qquad X^- \;=\; -\min(X, 0), \qquad |X|.$$

4. (σ-Algebren)

a) Sei Ω eine nichtleere Menge, und $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Zeige, dass $\sigma(\mathcal{J})$ eine σ-Algebra ist.

b) Folgere, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ alle abgeschlossenen und offenen Intervalle enthält.

c) Zeige $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \;=\; \sigma\left((-\infty, c] : c \in \mathbb{R} \right)$.

d) Wie sieht ein möglichst einfaches Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ aus ?

[1] Genauer ist $F_X(x-)$ der Limes von $(F_X(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ entlang einer beliebigen monoton steigenden, gegen x konvergenten Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n < x$ für alle $n \in \mathbb{N}$.