

10. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt“

Abgabe bis Donnerstag den 15.12, 18 Uhr im Postfach „Stochastik für Lehramt“ oder auf eCampus.

1. (**Varianz und Kovarianz**) Seien X und Y Zufallsvariablen mit Wertebereich $\{0, 1, 2, 3\}$. Die gemeinsame Verteilung sei gegeben durch

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$x = 0$	0.11	0.05	0.02	0.00
$x = 1$	0.04	0.20	0.10	0.04
$x = 2$	0.01	0.05	0.18	0.06
$x = 3$	0.00	0.01	0.03	0.10

- Berechnen Sie die Erwartungswerte von X und Y .
- Berechnen Sie $\text{Var}[X]$, $\text{Var}[Y]$ und $\text{Cov}[X, Y]$.
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariable

$$Z := (X + Y)/2.$$

2. (**Starkes vs. schwaches Gesetz der großen Zahlen**)

Es sei $S_n = \sum_{i=2}^n X_i$, wobei $(X_i)_{i \geq 2}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$P[X_i = i] = \frac{1}{i \log i} \quad \text{und} \quad P[X_i = 0] = 1 - \frac{1}{i \log i}$$

ist. Zeigen Sie:

- $\mathbb{E}[S_n/n] \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.
- Es gilt ein schwaches der großen Zahlen, d.h. $S_n/n \rightarrow 0$ P -stochastisch.
- (**Bonusaufgabe** für 3 Punkte) Ein starkes Gesetz der großen Zahlen gilt nicht.

Hierbei darf das *Borel-Cantelli Lemma* ohne Beweis verwendet werden: Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} P[A_n] = \infty$ für unabhängige Ereignisse A_1, A_2, \dots , dann gilt

$$P[\text{unendlich viele der Ereignisse } A_n \text{ treten ein}] = P\left[\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right] = 1$$

3. (Korrelation und lineare Prognosen) Ein Würfel wird zweimal geworfen. Seien X_1 und X_2 die unabhängigen Ausgänge des jeweiligen Wurfes.

- a) Berechnen Sie die Korrelation $\rho[X_1, X_1 + X_2]$.
- b) Berechnen Sie die Korrelation $\rho[X_1, \max(X_1, X_2)]$.
- e) Bestimmen Sie basierend auf X_1 die besten linearen Prognosen im quadratischen Mittel für die Zufallsvariablen $X_1 + X_2$ und $\max(X_1, X_2)$.

4. (Regressionsgeraden und Simpson-Paradox) Langzeitstudent Anton hat bei 8 ehemaligen Kommilitonen die Studiendauer (in Semestern) und das Anfangsgehalt (in 1000€) ermittelt:

Studiendauer	10	9	11	9	11	12	10	11
Anfangsgehalt	35	35	34	36	41	39	40	38

Er zeichnet die Regressionsgerade für das Anfangsgehalt in Abhängigkeit von der Studiendauer und verkündet triumphierend: “Längeres Studium führt zu einem höheren Anfangsgehalt!” Seine Freundin Brigitte bezweifelt dies und stellt fest, dass die ersten vier in der Tabelle ein anderes Schwerpunktgebiet gewählt haben als die restlichen vier. Sie zeichnet die Regressionsgeraden für jede dieser Vierergruppen und stellt fest: “Studiendauer und Anfangsgehalt sind negativ korreliert!” Bestimmen und zeichnen Sie die genannten Regressionsgeraden.