Stochastische Analysis

Karl-Theodor Sturm

Literatur:

- I. Karatzas, S. Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus. 2nd ed. Springer '91
- D. Revuz, M. Yor: Continuous Martingales and Brownian Motion, 2nd ed. Springer '94
- W. Hackenbroch, A. Thalmaier: Stochastische Analysis, Teubner '91

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

0.1 Analysis und gewöhnliche Differentialgleichungen

Die Erfindung der *Analyis* (= Differential- und Integralrechnung) durch Newton (1643-1727) und Leibniz (1646-1716) löste den Siegeszug der Mathematik bei der Beschreibung von Naturphänomenen und ökonomischen Zusammenhängen aus und führte zur Mathematisierung von Physik, Chemie, Biologie, Technik, Ökonomie, ...
Gewöhnliche Differentialgleichungen dienen der Modellierung von Phänomenen der realen Welt: $\mathrm{d}y_t = b(t, y_t)\ \mathrm{d}t$. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erlaubt äquivalente Formulierung in differentieller und integreller Form:

$$\dot{y}_t = b(t, y_t) \quad \text{bzw.} \quad y_T = y_0 + \int_0^T b(t, y_t)\ \mathrm{d}t$$

0.2 Stochastische Analysis und stochastische Differentialgleichungen

Die *Stochastische Analysis* hat die Beschreibung von Naturphänomenen zum Ziel, die stochastischen (= nicht deterministischen) Einflüssen unterworfen sind.
Dies geschieht z.B. mittels *stochastischer Differentialgleichungen* der Form

$$\mathrm{d}Y_t = b(t, Y_t)\ \mathrm{d}t + \sigma(t, Y_t)\ \mathrm{d}M_t. \tag{0.1}$$

Formal führt das zu

$$\dot{Y}_t = b(t, Y_t) + \sigma(t, Y_t)\dot{M}_t. \tag{0.2}$$

$b(t, Y_t)$ bezeichnet hier den Einfluss des (deterministischen) „Signals", $\sigma(t, Y_t)\dot{M}_t$ den Einfluß des (stochastischen) „Rauschens".
Für $(M_t)_{t\geq 0}$ wählt man ein stetiges Martingal (also einen stochastischen Prozeß ohne erkennbare Signalkomponente), typischerweise die Brownsche Bewegung (BB).
Problem: für solche (M_t) ist fast keine Trajektorie differenzierbar! Es gibt keine pfadweise *stochastische Differentiation*! (Lediglich eine Art „stochastische Differentiation im distributiven Sinne" im Rahmen des sog. Malliavin-Kalküls, von Paul Malliavin ab 1978 entwickelt.)
Ausweg: Wir vergessen die differentielle Interpretation (0.2) und definieren (0.1) mittels der folgenden integralen Version

$$Y_T = Y_0 + \int_0^T b(t, Y_t)\ \mathrm{d}t + \int_0^T \sigma(t, Y_t)\ \mathrm{d}M_t \tag{0.3}$$

Hierzu müssen wir *stochastischen Integralen* der Form $\int_0^T X_t \, \mathrm{d}M_t$ eine Bedeutung geben (für $(M_t)_t$ Martingal, $(X_t)_t$ „messbarer" stochastischer Prozeß).
Das geht! *Itô Integral* (Kyoshi Itô).

- R. Paley, N. Wiener, A. Zygmund (1933): (X_t) deterministisch, (M_t) BB
- K. Itô (1942,44): (X_t) stochastisch, (M_t) BB
- H. Kunita, S. Watanabe (1967): (X_t) stochastisch, (M_t) Martingal

0.3 Die Idee des Itô-Integrals

Definition 0.3.1. $Y_t(\omega) = \int_0^T X_t(\omega) \, \mathrm{d}M_t(\omega)$ *als L^2-Limes der Approximationen*

$$Y_T^{\Delta(n)}(\omega) = \sum_{t_i \in \Delta(n)} X_{t_{k-1}}(\omega) \cdot (M_{t_k \wedge T}(\omega) - M_{t_{k-1} \wedge T}(\omega)) \tag{0.4}$$

für Partitionen $\Delta(n)$ von $[0, \infty[$ mit Feinheit $|\Delta(n)| \to 0$.

Für eine große Klasse von (M_t) und (X_t) existiert dieser Limes und es gilt:

- $(Y_t)_t$ ist stetiges Martingal
- $\mathbf{E}(Y_t^2) = \mathbf{E} \int_0^t X_s^2 \, \mathrm{d}\langle M \rangle_s$
  mit $\langle M \rangle =$ *Quadratische Variation* von $M = (M_t)_k$ (z.B. $\langle M \rangle_t = t$ für BB).

<u>Achtung:</u> Diese Eigenschaften gelten nicht, falls man in (0.4) $X_{t_{k-1}}$ durch X_{t_k} (rückläufiges Itô-Integral) oder $\frac{1}{2}(X_{t_{k-1}} + X_{t_k})$ (Stratonovich-Integral) ersetzt!
Allerdings gilt für das Itô-Integral nicht $\mathrm{d}f(M_t) = f'(M_t) \, \mathrm{d}M_t$ (das gilt für klassische Integrale und für das Stratonovich-Integral), sondern die *Itô-Formel*

$$\mathrm{d}f(M_t) = f^{'}(M_t) \, \mathrm{d}M_t + \frac{1}{2} f^{''}(M_t) \, \mathrm{d}\langle M \rangle_t$$

(Kettenregel für stochastische Integrale)

0.4 Stochastische DGl und partielle DGl

Sei $(M_t)_t$ die d-dim BB mit infinitesimalem Erzeuger $\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ und $(Y_t)_t$ die Lösung der <u>SDGl</u> $\mathrm{d}Y_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t) \, \mathrm{d}M_t$.
Dann hat $(Y_t)_t$ folgenden infinitesimalen Erzeuger

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit b (Drift-Vektor) wie oben und $a = \sigma\sigma^*$ (Diffusionsmatrix), d.h. $a_{ij}(x) = \sum\limits_{k=1}^{d} \sigma_{ik}(x) \cdot \sigma_{jk}(x)$.
Es gilt also

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(E_x f(Y_t) - f(x)) = (Lf)(x).$$

$\Rightarrow$ Partielle DGl lassen sich mit Hilfe stochstischer DGl lösen!

1 Filtrationen und Stoppzeiten

Im folgenden sei stets vorgegeben ein Wahrscheinlichkeits-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1.1 Stoch. Prozesse (Wiederholung)

Definition 1.1.1. *Sei $(E, \mathcal{E})$ ein Messraum. Eine Familie $X = (X_t)_{t\geq 0}$ heißt* stochastischer Prozess *(auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$), falls*

$$\forall\, t \geq 0: \quad X_t : \Omega \to E \text{ ist } \mathcal{F}\text{-messbar}$$

(genauer: $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-messbar), d.h. eine Zufallsvariable. $t \in [0, \infty[$ wird als Zeit interpretiert, E als Zustandsraum (meist $E = \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$).
Für fixes $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung

$$X_\bullet(\omega) : \mathbb{R}_+ \to E, \quad t \mapsto X_t(\omega)$$

Trajektorie*.*
Wir verwenden folgende äquivalente Interpretationen:

$$X \;:\; \mathbb{R}_+ \times \Omega \to E, \quad (t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

$$X \;:\; \Omega \to E^{\mathbb{R}_+}, \quad \omega \mapsto X_\bullet(\omega) \quad \textit{(zufälliges Auswählen von Trajektorien).}$$

Definition 1.1.2. *Zwei stochastische Prozesse X, Y (auf dem selben W.-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit dem selben Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$) heißen*

- Modifikationen *voneinander, falls*
  $\mathbf{P}(X_t = Y_t) = 1$ *für alle $t \geq 0$.*
- ununterscheidbar*, falls $\mathbf{P}(X_t = Y_t$ für alle $t \geq 0) = 1$, mit anderen Worten*
  $\mathbf{P}(X_\bullet = Y_\bullet) = 1$*.*

Bemerkung 1.1.3. Ununterscheidbar $\Rightarrow$ Modifikation voneinander!
Umkehrung gilt i.A. nicht!

$$\left(\text{z.B. } \Omega = [0,1], P = \lambda^1, X_t(\omega) = 0, (\forall t, \omega) \text{ und } Y_t(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } t = \omega \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \right)$$

Lemma 1.1.4. *Seien fast alle Trajektorien von X, Y rechtsseitig stetig. Dann gilt: Ununterscheidbar $\iff$ Modifikation voneinander.*

Beweis. Übung. $\square$

1.2 Filtrationen

Definition 1.2.1. *Eine Familie* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *heißt* Filtration *(=Filtrierung) falls* $\forall 0 \leq s \leq t < \infty : \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_t$ *σ-Algebren auf* Ω *sind mit* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.

Intuitiv: $\mathcal{F}_t$ *enthält die bis zum Zeitpunkt* $t \in [0, \infty[$ *verfügbare Information. (Erlaubt Unterscheidung von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft.)*

Definition 1.2.2. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *heißt* filtrierter Wahrscheinlichkeits-Raum *oder* stochastische Basis. *Man setzt:*

- $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_s$,
- $\mathcal{F}_{t-} = \sigma(\mathcal{F}_s : s < t)$,
- $\mathcal{F}_{0-} = \{\emptyset, \Omega\}$ *und*
- $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t : t \geq 0) = \sigma(\mathcal{F}_{t+} : t \geq 0) = \sigma(\mathcal{F}_{t-} : t \geq 0)$.

Offenbar gilt $\mathcal{F}_{t-} \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+}$.

Definition 1.2.3. $(\mathcal{F}_t)$ *heißt* rechtsstetige Filtration, *falls* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} \quad (\forall t \geq 0)$.

Beispiel 1.2.4. Stets ist $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ eine rechtsstetige Filtration.

Definition 1.2.5. *Der filtrierte Wahrscheinlichkeits-Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ *heißt* vollständig, *wenn* $\mathcal{F}_0$ *alle* $(\mathcal{F}, \mathbf{P})$*-Nullmengen enthält.*
Eine Menge $A \subset \Omega$ *heißt* $(\mathcal{F}, \mathbf{P})$*-Nullmenge, falls* $\exists A' \subset \mathcal{F}$ *mit* $A' \supset A$ *und* $\mathbf{P}(A') = 0$.

Bemerkungen 1.2.6.

(i) Ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ vollständig, so ist jeder der Wahrscheinlichkeits-Räume $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ vollständig.

(ii) Umkehrung gilt nicht!
Es gibt i.A. mehr $(\mathcal{F}, \mathbf{P})$-Nullmengen als $(\mathcal{F}_0, \mathbf{P})$-Nullmengen.

(iii) Man erhält einen vollständigen filtrierten Wahrscheinlichkeits-Raum durch *Augmentieren*: Ersetze $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_t$ durch $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$ bzw. $\mathcal{F}'_t = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N})$ mit $\mathcal{N} =$ Menge der $(\mathcal{F}, \mathbf{P})$-Nullmengen.

(Hinweis: Statt $(\mathcal{F}, P)$-Nullmengen verwenden manche Autoren bei obiger Definition $(\mathcal{F}_\infty, P)$-Nullmengen.)

Definition 1.2.7. *Der filtrierte Wahrscheinlichkeits-Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ genügt den üblichen Bedingungen *(bzw. ist ein standard-filtrierter Wahrscheinlichkeits-Raum), falls er vollständig ist und die Filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *rechtsstetig ist.*

Bemerkung 1.2.8. Standard-Erweiterung:

(i) Augmentieren: ${\mathcal{F}_t}'$ und $\mathcal{F}'$,

(ii) Rechte Limiten $(\mathcal{F}'_{t+}) \Rightarrow (\Omega, \mathcal{F}'_{t+}, \mathcal{F}', P)$ standard filtrierter Wahrscheinlichkeits-Raum.

1.3 Adaptierte Prozesse

Definition 1.3.1.

(i) *Gegeben: Stochastischer Prozess X auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$.*
$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s : s \leq t)$$
heißt die von X erzeugte Filtration*.*

(ii) *X heißt an eine vorgegebene Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$* adaptiert*, falls*
$$\mathcal{F}_t{}^X \subset \mathcal{F}_t (\forall\, t \geq 0)$$
oder, mit anderen Worten, falls X_t $\mathcal{F}_t$-messbar ($\forall\, t \geq 0$) ist.

Beispiele 1.3.2.

(i) (X_t) ist an $(\mathcal{F}_t^X)$ adaptiert. (Trivial)

(ii) Sei $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ gegeben.
Sei weiter $X_t := \mathbf{E}(f|\mathcal{F}_t)$
Dann ist $(X_t)_{t\geq 0}$ an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert.

Bemerkung 1.3.3. Oft bezeichnet man die von einem Prozess X erzeugte Filtration $(\mathcal{F}_t^X)$ mit $(\mathcal{F}_t^0)$ und ihre Standard-Erweiterung dann mit $(\mathcal{F}_t)$.

(iii) Gegeben: $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ ununterscheidbar, $(X_t)_{t\geq 0}$ an $(\mathcal{F}_t)$ adaptiert und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ vollständig $\Rightarrow$ $(Y_t)_{t\geq 0}$ an $(\mathcal{F}_t)$ adaptiert.
(Achtung: Hier reicht nicht, daß $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ vollständig ist!)

1.4 Progressiv messbare Prozesse

Definition 1.4.1. *Ein Prozess X heißt* progressiv messbar *bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$, falls für alle $t \geq 0$: die Abbildung*
$$X : [0,t] \times \Omega \to E, \quad (s, \omega) \mapsto X_s(\omega) \quad \textit{messbar bzgl. } \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t \textit{ ist.}$$

Proposition 1.4.2. *Sei X ein stochastischer Prozess mit Werten im topologischen Raum E, rechtsstetig (d.h. alle(!) Trajektorien $t \mapsto X_t(\omega)$ sind rechtsstetig) (oder linksstetig), und adaptiert an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dann ist X progressiv messbar.*

Beweis. Sei X rechtsstetig, $t > 0$ fix. Wir approximieren X durch $X^{(n)}$ mit
$$X_s^{(n)}(\omega) := X_{(k+1)t2^{-n}}(\omega) \text{ für } s \in]kt2^{-n}, (k+1)t2^{-n}], \qquad k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$$
und $X_0^{(n)}(\omega) := X_0(\omega)$.
Dann ist $X^{(n)} : (s, \omega) \mapsto X_s^{(n)}(\omega)$ messbar bzgl. $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$.
Wegen Rechtsstetigkeit:
$$\lim_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega) \text{ für alle } (s, \omega) \in [0,t] \times \Omega.$$
$\Rightarrow X : [0,t] \times \Omega \to E$ ist $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar. $\square$

1.5 Stoppzeiten

Definition 1.5.1. *Eine Abbildung* $T : \Omega \to [0, \infty]$ *heißt* Stoppzeit *bzgl.* $(\mathcal{F}_t)$*, falls* $\forall t \geq 0$*:*

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

wobei $\{T \leq t\} := \{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq t\}$*.*
Sie heißt schwache Stoppzeit *(oder Optionszeit) bzgl.* $(\mathcal{F}_t)$*, falls* $\forall\, t \geq 0$

$$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Bemerkungen 1.5.2.

(i) Jede Stoppzeit ist schwache Stoppzeit, denn

$$\{T < t\} = \bigcup_n \underbrace{\left\{T \leq t - \frac{1}{n}\right\}}_{\in \mathcal{F}_{t-\frac{1}{n}} \subset \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t$$

(ii) T ist schwache Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t) \iff T$ ist Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_{t+})$.

(iii) $(\mathcal{F}_t)$ rechtsstetig $\Rightarrow$ Jede schwache Stoppzeit ist Stoppzeit.

Beispiel 1.5.3. Jede „konstante Zeit“ $T \equiv t_0$ ist eine Stoppzeit.

(iv) T ist Stoppzeit $\iff X_t = \mathbb{1}_{[0,T[}(t)$ ist adaptiert, (denn $\{X_t = 0\} = \{T \leq t\}$).

Proposition 1.5.4.

(i) *Mit* S *und* T *sind auch* $S \wedge T, S \vee T, S + T$ *(schwache) Stoppzeiten.*

(ii) *Mit* T_n *(schwache) Stoppzeit* $(\forall n \in \mathbb{N})$ *ist auch* $\sup_n T_n$ *eine (schwache) Stoppzeit und* $\inf_n T_n$ *eine schwache Stoppzeit.*

$$\left(\textit{Denn: } \left\{\sup_n T_n \leq t\right\} = \bigcap_n \{T_n \leq t\} \textit{ und } \left\{\inf_n T_n < t\right\} = \bigcup_n \{T_n < t\}.\right)$$

(iii) *Jede schwache Stoppzeit* T *läßt sich monoton durch Stoppzeiten* T_n *mit endlichem Wertebereich approximieren:*

$$T_n := \begin{cases} (k+1)2^{-n} & \textit{auf } \{k2^{-n} \leq T < (k+1)2^{-n}\}, k = 0, 1, \ldots, 4^n, \\ +\infty & \textit{sonst} \end{cases}.$$

$\Rightarrow T_n \overset{n\to\infty}{\to} T, T_n \geq T_{n+1} > T$ *und* $T_n > T$ *auf* $\{T < \infty\}$*.*

Proposition 1.5.5 (Galmarino's Test)**.** *Sei* $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ *(oder* $\Omega = D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) = \{\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ *càdlàg*$\}$*),* $X_t(\omega) = \omega(t)$ *und* $\mathcal{F}_t = {\mathcal{F}_t}^X$*. Dann gilt:*

(i) *T ist (schwache) Stoppzeit genau dann, wenn $\forall\, t \geq 0$, und $\forall \omega, \omega' \in \Omega$ gilt:*
$(T(\omega) \underset{(<)}{\leq} t)$ *und* $\forall s \leq t : X_s(\omega) = X_s(\omega') \quad \Rightarrow T(\omega) = T(\omega')$.

Ist T Stoppzeit, dann gilt

(ii) $A \in \mathcal{F}_T \iff (\omega \in A, \forall s \leq T(\omega) : X_s(\omega) = X_s(\omega'), T(\omega) = T(\omega') \Rightarrow \omega' \in A)$.

(iii) *f ist $\mathcal{F}_T$-messbar* $\iff f(\omega) = f(\omega_T)$ *mit* $\omega_T(s) = \omega(s \wedge T(\omega))$.

(iv) $\mathcal{F}_T = \sigma(X_s^T : s \geq 0)$.

1.6 Treffer- und Eintrittszeiten

Definition 1.6.1. *Sei (X_t) ein an $(\mathcal{F}_t)$ adaptierter Prozeß und $A \subset E$.*

$$T_A(\omega) := \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\} \quad \textit{Eintrittszeit von } A$$

$$T_A^*(\omega) := \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \in A\} \quad \textit{Trefferzeit von } A$$

(jeweils mit $\inf \emptyset := +\infty$*.)*

Bemerkungen 1.6.2.

(i) Für $\Gamma \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$

$$D_\Gamma(\omega) := \inf\{t \geq 0 : (t, \omega) \in \Gamma\} \quad \text{Debut von } \Gamma$$

Somit für $A \subset E : T_A = D_{X^{-1}(A)}$.

(ii) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ genüge den üblichen Bedingungen
<u>Debut-Theorem:</u> Für jedes progressiv messbare $\Gamma \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ ist D_Γ eine Stoppzeit.
<u>Korollar:</u> X progressiv messbar $\Rightarrow T_A$ ist Stoppzeit $\quad \forall A \in \mathcal{E}$.

(iii) Jede Stoppzeit ist eine Eintrittszeit:
wähle $X_t := \mathbb{1}_{[0,T[}(t)$ und $A := 0 \Rightarrow T_A = T$.

Satz 1.6.3. *Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ adaptiert (an vorgegebene Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$) und rechtsstetig (d.h. E ist topologischer Raum und alle Trajektorien $X_\bullet(\omega)$ sind rechtsstetig).*

(i) $T_A^* = T_A$ *schwache Stoppzeit ($\forall A$ offen $\subset E$)*

(ii) *Ist X sogar stetig und E metrisierbar, so ist*
T_A Stoppzeit ($\forall A \subset E$ abgeschlossen)
und T_A schwache Stoppzeit ($\forall A$ F_σ-Menge, d.h. $A = \bigcup_n A_n$ mit A_n abgeschlossen).

(iii) *(ohne Beweis) Genügt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ den üblichen Bedingungen, so ist T_A Stoppzeit ($\forall A \in \mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$)*

Beweis.

(i) Stets ist $\{T_A \geq t\} = \{X_s \notin A : \forall s \in [0,t[\}$ und $\{T_A^* \geq t\} = \{X_s \notin A : \forall s \in]0,t[\}$. Daher bei offenem A und rechtsstetigem X:

$$\begin{aligned}\{T_A \geq t\} = \{T_A^* \geq t\} &= \{X_s \notin A : \forall s \in [0,t[\cap\mathbb{Q}\} \\ &= \bigcap_{s\in[0,t[\cap\mathbb{Q}} \{X_s \notin A\} \in \mathcal{F}_t\end{aligned}$$

$\Rightarrow T_A$ ist schwache Stoppzeit.

(ii) Für A abgeschlossen

$$\begin{aligned}\{T_A > t\} &= \{X_s \notin A : \forall s \in [0,t]\} \\ &= \{\omega : d(X_s(\omega), A) > 0, \forall s \in [0,t]\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\omega : d(X_s(\omega), A) \geq \frac{1}{n}, \forall s \in [0,t]\right\} \\ &\quad \text{[wegen Stetigkeit von } X_s(\omega) \text{ und damit von } s \mapsto d(X_s(\omega), A)] \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\omega : d(X_s(\omega), A) \geq \frac{1}{n}, \forall s \in [0,t] \cap \mathbb{Q}\right\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \left\{d(X_s(\cdot), A) \geq \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_t\end{aligned}$$

Ist $A = \bigcup A_n$ mit A_n abgeschlossen ($\Rightarrow T_{A_n}$ Stoppzeit), so ist $T_A = \inf_n T_{A_n}$ schwache Stoppzeit (siehe Proposition 1.5.4).

□

Beispiele 1.6.4. $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, X Koordinatenprozess (d.h. $X_t(\omega) = \omega(t)$) und $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$.
Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^d$ offen.
$\Rightarrow T_A^*$ ist schwache Stoppzeit, aber keine Stoppzeit.
$\Rightarrow \mathcal{F}_t \neq \mathcal{F}_{t+}$

Intuitive Begründung (Genaueres siehe Übung "Galmarino's Test"):
Wähle ω mit $\omega(0) \notin \overline{A}$ und $\omega(t) \in A$ für ein $t > 0$, d.h. für $t_0 = T_A^*(\omega)$ gilt: $0 < t_0 < \infty$.
Wegen Stetigkeit ist $\omega(t_0) = \partial A$.
Definiere neuen Pfad $\omega' \in \Omega$ durch $\omega'(t) = \omega(t \wedge t_0)$. Offenbar $\omega' \notin A (\forall t \geq 0)$ und damit $T_A^*(\omega') = +\infty$. Nun gilt:
$\omega(t) = \omega'(t) \quad \forall t \leq t_0$
$\Rightarrow \forall \Gamma \in \mathcal{F}_{t_0} : \omega \in \Gamma \iff \omega' \in \Gamma \quad$ (Galmarino)
Aber offensichtlich ist $\omega \in \{T_A^* \leq t_0\}$ und $\omega' \notin \{T_A^* \leq t_0\}$
$\Rightarrow \{T_A^* \leq t_0\} \notin \mathcal{F}_{t_0} \Rightarrow T_A^*$ keine Stoppzeit.
$\Rightarrow (\mathcal{F}_t)$ nicht rechtsstetig.

Weitere Beispiele für (schwache) Stoppzeiten:

$A, B \subset E$ disjunkt, $T_0 := 0, n \in \mathbb{N}_0$
$T_{2n+1} = \inf\{t \geq T_{2n} : X_t \in A\}$
$T_{2n+2} = \inf\{t \geq T_{2n+1} : X_t \in B\}$
(z.B. $A = \mathbb{R}^d \setminus B$, schlecht bei BB, dann fast sicher $T_n = T_1 \quad \forall n$)

Keine (schwache) Stoppzeit
Letzte (oder vorletzte etc.) Austrittszeit aus A
$L_A = \sup\{t \geq 0 : X_t \in A\}$.
Denn (intuitiv): Ist $L_A(\omega) = t$ so weiß ω das zum Zeitpunkt t (und auch unmittelbar danach) noch nicht!! (sondern erst am Ende seiner Tage.)

1.7 Die T-Vergangenheit

Definition 1.7.1. *Für Stoppzeit T sei*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\}$$

die σ-Algebra der T-Vergangenheit.
Analog läßt sich für schwache Stoppzeiten T definieren

$$\mathcal{F}_{T+} = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\}$$

Beides sind tatsächlich σ-Algebren (Beweis wie im diskreten Fall). Jede Stoppzeit T ist $\mathcal{F}_T$-meß bar, jede schwache Stoppzeit $\mathcal{F}_{T+}$-meß bar. $\mathcal{F}_T$ besteht aus den Ereignissen, die bis zum zufälligen Zeitpunkt T eintreten. Stets ist $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T+}$. Für $T \equiv t$ ist $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$ und $\mathcal{F}_{T+} = \mathcal{F}_{t+}$.

Bemerkungen 1.7.2. Wie im diskreten Fall gelten folgende Eigenschaften:

(i) $S \leq T \Rightarrow \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$

(ii) $\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$

(iii) $\mathbf{E}(\cdot | \mathcal{F}_{S \wedge T}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\cdot | \mathcal{F}_S) | \mathcal{F}_T)$

(iv) T_n schwache Stoppzeit ($\forall n \in \mathbb{N}$), $T = \inf_n T_n$ (T ist also eine schwache Stoppzeit). Dann gilt $\bigcap_n \mathcal{F}_{T_{n+}} = \mathcal{F}_{T+}$

Kurze Wiederholung: Sei $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_{t+}$. Dann gilt:
T schwache Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t) \iff T$ Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{G}_t)$ und $\mathcal{F}_{T+} = \mathcal{G}_T$.

Satz 1.7.3. *Sei X progressiv messbar und T eine Stoppzeit.*

(i) $X_T : \{T < \infty\} \to E, \quad \omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$ *ist $\mathcal{F}_T$-messbar.*

(ii) *Der* gestoppte Prozeß $X^T : (t, \omega) \mapsto X_{T(\omega) \wedge t}(\omega)$ *ist progressiv meßbar. (sowohl bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ als auch bzgl. $(\mathcal{F}_{t \wedge T})_{t \geq 0}$).*

Beweis.

(i) T ist $\mathcal{F}_T$-messbar $\Rightarrow$ für fixes $t \geq 0$ gilt:

$$T^* : \{T \leq t\} \to [0,t] \times \Omega, \quad \omega \mapsto (T(\omega), \omega)$$

ist $\mathcal{F}_t \cap \{T \leq t\}/\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar, denn für $B \in \mathcal{B}([0,t])$ und $A \in \mathcal{F}_t$ gilt:

$$\{T^* \in B \times A\} \cap \{T \leq t\} = \{T \in B\} \cap A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Progressive Messbarkeit von $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to E$ bedeutet $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t/\mathcal{E}$-Messbarkeit von X auf $[0,t] \times \Omega$.
$\Rightarrow \mathcal{F}_t \cap \{T \leq t\}/\mathcal{E}$-Messbarkeit von $X_T = X \circ T^*$ auf $\{T \leq t\}$.
Das gilt $\forall t \geq 0$
$\Rightarrow X_T$ ist $\mathcal{F}_T/\mathcal{E}$-messbar auf $\{T < \infty\}$.

(ii) Für fixes $t \geq 0$ gilt:
$T_t : \Omega \to [0,t] \times \Omega$, $\omega \mapsto (T(\omega) \wedge t, \omega)$ ist $\mathcal{F}_{t \wedge T}/\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar
$\Rightarrow T_t^* : [0,t] \times \Omega \to [0,t] \times \Omega$ ist $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_{t \wedge T}$-messbar.
Da X progressiv messbar ist, gilt:
$X^T = X \circ T_t^* : [0,t] \times \Omega \to E$, $(s,\omega) \mapsto X_s^T(\omega)$ ist $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_{t \wedge T}/\mathcal{E}$-messbar

□

1.8 Treffer-Verteilung

Korollar 1.8.1. *Sei X progressiv messbar und T eine schwache Stoppzeit. Dann definiert*

$$\nu_T(C) = \mathbf{P}(X_T \in C, T < \infty) \quad (\forall C \in \mathcal{E})$$

ein Maß ν_T auf $(E, \mathcal{E})$.
Speziell für $T = T_A$ heiß t ν_T „Trefferverteilung “. *Ist $T < \infty$ f.s., so ist ν_T ein Wahrscheinlichkeitsmaß , nämlich das Bildmaß $\nu_T = X_T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}_{X_T} = \mathbf{P} \circ X_T^{-1}$.*

Beweis. Sei $\mathbf{P}^*(C) = \mathbf{P}(C \cap \{T < \infty\}) \Rightarrow \mathbf{P}^*$ Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ bzw. äquiv. auf $(\Omega^*, \Omega^* \cap \mathcal{F})$ mit $\Omega^* := \{T < \infty\} \subset \Omega$. Auf Ω^* ist X_T $\mathcal{F}_{T+}$-messbar, also $\mathcal{F}$-messbar.
$\Rightarrow \nu_T = \mathbf{P}^* \circ X_T^{-1}$ ist Maß . □

Satz 1.8.2. *Sei X stetig und $T = T_A$ mit $A \subset E$ abgeschlossen. Dann sind die Verteilungen von T und X_T, also $\mathbf{P}(T \in \cdot)$ und $\nu_T(\cdot) = \mathbf{P}(X_T \in \cdot, T < \infty)$, durch die endlich-dimensionalen Verteilungen von X festgelegt.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für ν_T. Es genügt z.z. $\nu_T(C)$ ist $(\forall C \subset E$ abgeschlossen) durch die endlich-dimensionalen Verteilungen festgelegt. Hierfür gilt

$$\begin{aligned}
& \nu_T(C) \\
= \; & \mathbf{P}\left[\{X_T \in C\} \cap \{T < \infty\}\right] \\
= \; & \mathbf{P}\left[\{\exists t \in \mathbb{R}_+ : \forall s \in [0,t[: X_s \notin A \text{ und } X_T \in A \cap C\}\right] \\
= \; & \mathbf{P}\left[\{\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k : \exists t \in \mathbb{Q}_+ : \forall s \in [0,t[: X_s \notin \mathcal{B}_{1/n}(A), X_t \in \mathcal{B}_{2/n}(A \cap C)\}\right] \\
= \; & \mathbf{P}\left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq k} \bigcup_{t\in\mathbb{Q}_+} \bigcap_{s\in\mathbb{Q}_+\cap[0,t[} \{X_s \notin \mathcal{B}_{1/n}(A)\} \cap \{X_t \in \mathcal{B}_{2/n}(A\cap C)\}\right]
\end{aligned}$$

□

Beispiel 1.8.3. Sei X die d-dim. standard BB (d.h. $P =$ Wiener Maß , $E = \mathbb{R}^d, X_0 = 0$), $x \in \mathbb{R}^d, r^2 > |x|^2$. $T_x := T_{\partial B_r(x)} = T^*_{\partial B_r(x)}$. Dann ist

(i) $\mathbf{E}(T_x) = \frac{r^2-|x|^2}{d}$ und

(ii) $\nu_{T_0}(\cdot)$ das zu 1 normierte Oberflächenmaß σ_r auf $\partial B_r(0)$.

Beweis. (ii) Sei C eine Borel-Teilmenge von $\partial B_r(0)$ und A eine orthogonale $d \times d$-Matrix. Aufgrund der Rotationsinvarianz der BB gilt:

$$\begin{aligned}
\nu_T(C) &= \mathbf{P}(X_T \in C) = \mathbf{P}((A \circ X)_T \in C) \\
&= \mathbf{P}(X_T \in A^{-1}C) = \nu_T(A^{-1}C)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \nu_T$ ist rotationsinvariant und normiert $\Rightarrow$ Beh.
Für jede beschränkte oder nicht-negative Borel-Funktion f auf $\mathbb{R}^d$ folgt:

$$\mathbf{E}(f(X_{T_{\partial B_r(0)}})) = \int_{\partial B_r(0)} f(y)\sigma_r(\,\mathrm{d}y)$$

(i) Offenbar ist $T_{\partial B_r(0)} = T^*_{\partial B_r(0)} < \infty$ (z.B. wegen das Satzes vom iterierten Logarithmus).
Nun ist $M_t := |X_t - x|^2 - d \cdot t - |x|^2$ ein Martingal mit $M_0 = 0$.
$\Rightarrow |X_{t\wedge T} - x|^2 - d \cdot (t \wedge T) - |x|^2$ ist Martingal
$\Rightarrow d \cdot \mathbf{E}(t \wedge T) = \mathbf{E}(|X_{t\wedge T} - x|^2) - |x|^2 \leq r^2 - |x|^2 \quad (\forall t)$
$\Rightarrow d \cdot \mathbf{E}(T) \leq r^2 - |x|^2$
Umgekehrt folgt aus dem Lemma von Fatou und der Stetigkeit von X:

$$d \cdot \mathbf{E}(T) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}(|X_{t\wedge T} - x|^2) - |x|^2 \geq \mathbf{E}(\lim_{t\to\infty} |X_{t\wedge T} - x|^2) - |x|^2 = r^2 - |x|^2$$

□

Mit aanderen Worten: Für die in x startende BB $(X_t, \mathbf{P}^x)$ gilt:

$$\mathbf{E}^x(T_0) = \frac{r^2 - |x|^2}{d}$$

Im Falle $d = 1$: Seien $a, b \geq 0$, $B_r(x) =]-a, b[, T = T_{\{-a,b\}}$
$\Rightarrow \mathbf{E}(T) = a \cdot b$

2 Martingale in stetiger Zeit

Stets vorgegeben: Filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}), E = \mathbb{R}^1$.

2.1 Definitionen und elementare Eigenschaften

Definition 2.1.1. *Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ heißt* Submartingal *(bzgl. $(\mathcal{F}_t)$), falls*

- *X an $(\mathcal{F}_t)$ adaptiert*
- *$\mathbb{R}$-wertig mit $\mathbf{E}(X_t^+) < \infty \quad (\forall t \geq 0)$*
- $$\forall 0 \leq s < t : \mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s \text{ f.s.} \tag{2.1}$$

X heißt Supermartingal*, falls $-X$ ein Submartingal ist.*
Es heißt Martingal*, falls es sowohl Sub- als auch Supermartingal ist.*
Ein Sub-/Supermartingal X mit $\mathbf{E}(|X_t|) < \infty \quad (\forall t \geq 0)$ heißt integrierbares *Sub-/Supermartingal bzw. L^1-Sub-/Supermartingal.*
Jedes (Sub-)Martingal X bzgl. $(\mathcal{F}_t)$ ist auch ein (Sub-)Martingal bzgl. der von ihm erzeugten Filtration $(\mathcal{F}_t^X)$, sowie bzgl. jeder Filtration $(\mathcal{G}_t)$ mit $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$.
Ebenso bzgl. der augmentierten Filtration $(\overline{\mathcal{F}_t})$, denn $\mathbf{E}(\cdot|\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(\cdot|\overline{\mathcal{F}_t})$ f.s.
I.A. ist jedoch für $\mathcal{G}_t \supset \mathcal{F}_t$ der Prozess X <u>kein</u> (Sub-)Martingal mehr bzgl. $(\mathcal{G}_t)$.
Die Submartingal-Ungleichung (2.1) *bedeutet: $\forall 0 \leq s < t, \forall A \in \mathcal{F}_s$:*

$$\int_A X_t \, \mathrm{d}\mathbf{P} \geq \int_A X_s \, \mathrm{d}\mathbf{P}$$

Beispiel 2.1.2. (trivial)
Sei $\mathcal{F}_t \equiv \mathcal{F} \quad (\forall t \geq 0)$. Dann gilt: (X_t) Submart. $\Leftrightarrow \forall s \leq t : X_t^+ \in L^1$ und $X_s \leq X_t$ f.s.

<u>Faustregel:</u> Martingale Beschreiben faire Spiele,
Supermartingale beschreiben realistische Spiele:
$\mathbf{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$: was ich aus jetziger Sicht zukünftig erwarten darf
X_s: was ich jetzt habe.

Proposition 2.1.3 (Standardbeispiele). *Sei X die d-dim. BB und $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$. Für $x, y \in \mathbb{R}^d$ bezeichne $x \cdot y$ das kanonische Skalarprodukt. Dann sind Martingale:*

(i) *$y \cdot X_t$ für $y \in \mathbb{R}^d$, insbesondere die Koordinatenprozesse X_t^i für $i = 1, \ldots, d$.*

(ii) $|X_t|^2 - d \cdot t$

(iii) $\exp(y \cdot X_t - \frac{1}{2}|y|^2 t)$ *für* $y \in \mathbb{R}^d$

Beweis. (i) Sei $Y_t = y \cdot X_t$ und $s < t$.

$$\mathbf{E}(Y_t|\mathcal{F}_s) = \underbrace{y \cdot \mathbf{E}(\underbrace{(X_t - X_s)}_{\text{unabhängig von } \mathcal{F}_s}|\mathcal{F}_s)}_{=0} + y \cdot \mathbf{E}(\underbrace{X_s}_{\text{messbar bzgl. } \mathcal{F}_s}|\mathcal{F}_s) = y \cdot X_s = Y_s$$

(ii) $\mathbf{E}(|X_t|^2|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(|X_t - X_s|^2 + 2X_s \cdot (X_t - X_s) + |X_s|^2|\mathcal{F}_s) = (t-s) + 0 + |X_s|^2$

(iii) Sei $Y = \exp(y \cdot X_t - \frac{|y|^2}{2} t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_t|\mathcal{F}_s) &= e^{-\frac{|y|^2}{2}t} \cdot \mathbf{E}(e^{y(X_t - X_s)} \cdot e^{yX_s}|\mathcal{F}_s) \\ &= e^{-\frac{|y|^2}{2}t} \cdot e^{y \cdot X_s} \cdot \underbrace{\mathbf{E}(e^{y \cdot (X_t - X_s)})}_{e^{y^2/2 \cdot (t-s)}} = Y_s \end{aligned}$$

denn sei Z_t eine in 0 startende d-dim. BB:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{y \cdot Z_t}) &= \int e^{y \cdot z} \,\mathrm{d}\mathbf{P}_{Z_t}(\,\mathrm{d}z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{yz} \cdot (2\pi t)^{-d/2} \cdot e^{-\frac{z^2}{2t}} \,\mathrm{d}z \\ &= e^{\frac{|y|^2}{2}t} \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi t)^{-d/2} \cdot e^{-\frac{(z-yt)^2}{2t}} \,\mathrm{d}z \\ &= e^{\frac{|y|^2}{2}t} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.1.4. (i) Seien X, Y Martingale. Dann sind $X+Y, X-Y, \alpha X$ ebenfalls Martingale $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$

(ii) Seien X, Y Submartingale. Dann sind $X+Y, X \vee Y, \alpha X$ Submartingale $(\forall \alpha \geq 0)$

(iii) Sei X ein Martingal und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex (oder X ein Submartingal und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und isoton) <u>und</u> $\mathbf{E}(|\varphi(X_t)|) < \infty \quad (\forall t \geq 0)$.
Dann ist $(\varphi(X_t))_{t \geq 0}$ Submart.
(z.B. $(X_t^+)_{t \geq 0}$).

(iv) Sei X ein Martingal $\iff$ X ist ein L^1-Submartingal mit $t \mapsto \mathbf{E}(X_t)$ konst.

Beweis. a), b) trivial. c) Jensen
d) „$\Leftarrow$“$\mathbf{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) \geq 0$ und $\mathbf{E}(X_t - X_s = 0)$
„$\Rightarrow$“$\mathbf{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) = 0$. □

2.2 Maximalungleichungen

Satz 2.2.1 ((Maximalungleichung)). *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Submartingal, $T \subset [0,\infty[$ abzählbar (oder X rechtsstetiges Submartingal, $T = [0,\infty[$) und $X^*(\omega) = \sup\limits_{t\in T} X_t(\omega)$. Dann gilt*

(i) $\lambda \cdot \mathbf{P}(X^* \geq \lambda) \leq \sup\limits_{t\in T} \mathbf{E}(X_t^+)$

(ii) *Ist sogar $X \geq 0$ oder X ein Martingal, dann gilt $\forall p > 1$:*

$$\|X^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t\in T} \|X_t\|_p$$

Lemma 2.2.2. *Für $a < b \subset \mathbb{R}$ gilt unter obigen Voraussetzungen:*

$$(b-a)\cdot \mathbf{E}(D_T(a,b,X(\omega))) \leq \sup_{t\in T} \mathbf{E}((X_t - b)^+)$$

Hierbei

$$\begin{aligned} D_T(a,b,X(\omega)) &= \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : \exists t_1 < t_2 < \cdots < t_{2n} \in T : \\ &\qquad X_{t_1}(\omega) > b, X_{t_2}(\omega) < a, X_{t_3}(\omega) > b, \ldots, X_{t_{2n}}(\omega) < a\} \\ &= \text{Anzahl der absteigenden Überquerungen von } [a,b] \text{ durch } X_0(\omega)|_T. \end{aligned}$$

Beweis von Satz und Lemma: Aussage bekannt für T endlich. Wähle isotone Folge (T_n) mit T_n endlich, $\bigcup T_n = T$. Die Behauptungen folgen mit dem Satz von der monotonen Konvergenz.

2.3 Regulierungsresultate

Satz 2.3.1. *Sei $(X_t)_t$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Submartingal mit $X_t \in L^1 \quad (\forall t \geq 0)$.*

(i) *Dann $\exists \Omega^* \in \mathcal{F}, \mathbf{P}(\Omega^*) = 1 : \forall \omega \in \Omega^*$:*
$\forall t \geq 0$ existiert $X_{t+}(\omega) = \lim\limits_{s\searrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$ und
$\forall t > 0$ existiert $X_{t-}(\omega) = \lim\limits_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$.
(Für $\omega \notin \Omega^*$ setze man $X_{t\pm}(\omega) = \limsup X_s(\omega)$.)

(ii) *Dann sind $X_{t+}, X_{t-} \in L^1$ und $\forall t \geq 0$:*

$$\mathbf{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_t) \geq X_t \quad \textit{f.s.} \tag{$*$}$$

und $\forall t > 0$:

$$\mathbf{E}(X_t|\mathcal{F}_{t-}) \geq X_{t-} \quad \textit{f.s.} \tag{$**$}$$

Dabei gilt Gleichheit in $(*)$ (bzw. $(**)$), falls $t \mapsto \mathbf{E}(X_t)$ rechts- (bzw. links-)stetig ist.
Insbesondere, falls X ein Martingal ist.

(iii) *$(X_{t+})_{t\geq 0}$ ist ein Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_{t+})$ (und $(X_{t-})_{t\geq 0}$ eines bzgl. $(\mathcal{F}_{t-})$.)*
Ist (X_t) ein Martingal, so sind beides Martingale (bzgl. der jeweiligen Filtration).

(iv) *Fast jede Trajektorie von $(Y_t) = (X_{t+})$ ist $\underset{\text{cádlág}}{\text{rcll}}$, d.h.:*

$$Y(\omega) : t \mapsto Y_t(\omega) \text{ ist } \underset{\substack{\text{(rc)}\\ \text{(cád)}}}{\text{rechtsstetig}} \text{ und besitzt linke } \underset{\substack{\text{(ll)}\\ \text{(lág)}}}{\text{Limiten}}$$

Beweis. (i) Wir zeigen $\exists X_{t-}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\left\{\omega : \lim_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ existiert nicht für ein } t > 0\right\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\omega : \lim_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ existiert nicht für ein } t \in [0,n]\right\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}, a<b} \left\{\omega : \liminf_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \leq a < b \leq \limsup_{s\nearrow t, s\in\mathbf{Q}} \text{ für ein } t \in [0,n]\right\} \\
&\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}, a<b} \left\{\omega : U_{[0,n]\cap\mathbf{Q}}(a,b,X(\omega)) = +\infty\right\}.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(U_{[0,n]\cap\mathbf{Q}}(a,b,X(\omega))\right) &\leq \frac{1}{b} \cdot \sup_{t\in[0,n]\cap\mathbf{Q}} \mathbf{E}((X_t - b)^+) \\
&= \frac{1}{b}\mathbf{E}((X_n - b)^+) < \infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{P}(\{\omega : U\left(U_{[0,n]\cap\mathbf{Q}}(a,b,X(\omega))\right) = +\infty\}) = 0$
$\Rightarrow \mathbf{P}(\{\omega : \lim_{s\nearrow t, s\in\mathbf{Q}} X_s(\omega) \text{ existiert nicht für ein } t > 0\}) = 0.$

(ii) Fixiere $t \geq 0$ und $(t_n)_{n\in-\mathbb{N}} \in \mathbf{Q}$ mit $t_n \searrow t$ für $n \to -\infty$.
Dann ist $(X_{t_n})_{n\in-\mathbb{N}}$ ein Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_{t_n})_{n\in-\mathbb{N}}$ („rückläufiges Submartingal") mit

$$\begin{aligned}
\sup_n \mathbf{E}(|X_{t_n}|) &\leq 2 \cdot \sup_n \mathbf{E}X_{t_n}^+ - \inf_n \mathbf{E}X_{t_n} \\
&\leq 2 \cdot \mathbf{E}X_{t_n}^+ - \mathbf{E}X_t < \infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow X_{t+} \in L^1, X_{t_n} \to X_t$ in L^1.
Aus $X_t \leq \mathbf{E}(X_{t_n}|\mathcal{F}_t)$ folgt daher $X_t \leq \mathbf{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_t)$.
Ferner (wegen L^1-Konvergenz) $\mathbf{E}(X_{t+}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_{t_n})$, und falls $t \mapsto \mathbf{E}(X_t)$ rechtsstetig, folgt $\mathbf{E}(X_t) = \mathbf{E}(X_{t+})$.
$\Rightarrow X_t = \mathbf{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_t)$.
(∗∗) analog: $X_{t_n} \leq \mathbf{E}(X_t|\mathcal{F}_{t_n}) \Rightarrow \mathbf{E}(X_{t-}|\mathcal{F}_{t_n}) \leq \mathbf{E}(X_t|\mathcal{F}_{t_n}) \Rightarrow X_{t-} \leq \mathbf{E}(X_t|\mathcal{F}_{t-})$.

(iii) Fixiere $s < t$ und sei s_n eine Folge mit $t > s_n \searrow s$. Dann gilt
$X_{s_n} \leq \mathbf{E}(X_t|\mathcal{F}_{s_n}) \leq \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_{s_n}) = \mathbf{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_{s_n}) \Rightarrow X_{s+} \leq \mathbf{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_{s+})$.

(iv) Rechtsstetig klar, linke Limiten wegen (i), angewandt auf das Submartingal (X_{t+}). $\square$

Korollar 2.3.2. *Sei X rechtsstetiges Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)$.*

(i) *Dann ist es Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_{t+})$ und bzgl. dessen Augmentierung.*

(ii) *Fast jede Trajektorie ist cádlág.*

Korollar 2.3.3. *Sei X (Sub-)Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)$, welche die üblichen Bedingungen erfüllt, und sei $t \mapsto \mathbf{E}(X_t)$ rechtsstetig (z.B. konstant, falls X Martingal).*
Dann $\exists$ Modifikation Y von X mit cádlág- Trajektorie und Y ist (Sub-)Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)$.

Beweis. Wähle $Y_t = X_{t+}$ von vorhin. Bleibt zu zeigen: (Y_t) ist Modifikation von (X_t), d.h.

$$\forall t \geq 0 : \quad \mathbf{P}(Y_t = X_t) = 1.$$

Nun gilt aber nach (ii) aus vorigem Satz:

$$\mathbf{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_t) = X_t \quad \text{f.s.}$$

und wegen $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$:

$$\mathbf{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_t) = X_{t+} \quad \text{f.s.}$$

$\square$

2.4 Konvergenzsätze

Satz 2.4.1 (Submartingal-Konvergenz)**.** *Sei (X_t) rechtsstetiges Submartingal mit*

$$\sup_t \mathbf{E}(X_t^+) < \infty.$$

Dann $\exists X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t$ f.s.

Korollar 2.4.2. *Sei $(X_t)_t$ rechtsstetiges, nicht-negatives Supermartingal. Dann existiert $X_\infty = \lim X_t$ f.s.*

Satz 2.4.3. *Sei $(X_t)_t$ rechtsstetiges, nicht-negatives Supermartingal (oder rechtsstetiges Martingal). Dann sind äquivalent:*

(ii) *$\lim_{t\to\infty} X_t$ existiert in L^1.*

(iii) *$\exists X_\infty \in L^1 : X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$ f.s. mit*
$(X_t)_{t\in[0,\infty]}$ ist Submart. (bzw. Mart.) bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$.

(i) $\{X_t : t \in [0, \infty[\}$ *ist gleichgradig integrierbar.*

Bemerkungen 2.4.4. (1) Die Aussagen sind erfüllt, falls $\sup_t \|X_t\|_p < \infty$ für ein $p > 1$. In diesem Fall $X_\infty \in L^p$ und $X_t \to X_\infty$ in L^p.

(2) Die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) gelten bereits für rechtsstetige Submartingale.

(3) Ist X rechtsstetiges Martingal, so ist ferner äquivalent zu (i), (iii):

(iv) $\exists X_\infty \in L^1 : \forall t \geq 0 : X_t = \mathbf{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t)$.

Bemerkung 2.4.5. $\{Y_t : t \in I\}$ gleichgradig integrierbar $:\iff$

$$\sup_{t \in I} \mathbf{E}(|Y_t| \cdot \mathbb{1}_{\{|Y_t| > M\}}) \overset{M \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

2.5 Optional Sampling

Satz 2.5.1. *Seien X rechtsstetiges Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)$ und S, T beschränkte Stoppzeiten mit $S \leq T$. Dann gilt*

$$\mathbf{E}(X_T | \mathcal{F}_S) \geq X_S \quad \textit{f.s.}$$

Beweis. Sei $t_0 \geq T$ und zunächst $X \geq 0 (\Rightarrow \in L^1)$. Approximiere S und T durch Stoppzeiten $S_n, T_n \leq t_0$ mit endlichem Wertebereich, $S_n \searrow S, T_n \searrow T$.
$\Rightarrow X_{S_n} \to X_S, X_{T_n} \to X_T$.
Nun gilt (Doob Lemma): $X_{S_n} \leq \mathbf{E}(X_{t_0} | \mathcal{F}_{S_n})$
$\Rightarrow \{X_{S_n} : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar (denn $\{\mathbf{E}(X_{t_0} | \mathcal{F}_{S_n})\}$ ist gleichgradig integrierbar)
$\Rightarrow X_{S_n} \to X_s$ in L^1, analog $X_{T_n} \to X_T$ in L^1.
Ferner gilt
$\int_A X_{S_n} \, \mathrm{d}\mathbf{P} \leq \int_A X_{T_n} \, \mathrm{d}\mathbf{P} \quad \forall A \in \mathcal{F}_{S_n} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}_S \subset \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n}$
$\Rightarrow \int_A X_S \, \mathrm{d}\mathbf{P} \leq \int_A X_T \, \mathrm{d}\mathbf{P} \quad \forall A \in \mathcal{F}_S$
$\Rightarrow$ Behauptung für $X_t \geq 0$.
$\Rightarrow$ analog: Behauptung für $X_t^{(n)} = X_t \vee (-n)$
$\Rightarrow$ Behauptung für beliebiges X_t mit monotoner Konvergenz. $\square$

Korollar 2.5.2. *Sei X rechtsstetig, adaptiert, integrierbar. Äquivalent sind*

(i) *X ist Martingal.*

(ii) *$\forall$ beschränten Stoppzeiten T ist* $\mathbf{E}(X_T) = \mathbf{E}(X_0)$.

Beweis. " $\Rightarrow$ " Optional Sampling.
" $\Leftarrow$ " Sei $s < t$ und $A \in \mathcal{F}_s$. Definiere $S := s \cdot \mathbb{1}_A + t \cdot \mathbb{1}_{A^C}$, d.h.

$$S(\omega) := \begin{cases} s & \text{, falls } \omega \in A \\ t & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Dann ist S Stoppzeit und $\mathbf{E}(X_0) = \mathbf{E}(X_S) = \mathbf{E}(X_t \cdot \mathbb{1}_{A^C}) + \mathbf{E}(X_s \cdot \mathbb{1}_A)$.
Ebenso ist $T \equiv t$ Stoppzeit und daher
$\mathbf{E}(X_0) = \mathbf{E}(X_T) = \mathbf{E}(X_t \cdot \mathbb{1}_{A^C}) + \mathbf{E}(X_t \cdot \mathbb{1}_A) \quad \Rightarrow$ Behauptung □

Korollar 2.5.3. *Unter obigen Voraussetzungen sind ebenfalls äquivalent*

(i) *X ist (Sub-)Martingal.*

(ii) *$\forall$ beschränkten Stoppzeiten $S \leq T$ gilt:*

$$\mathbf{E}(X_S) \leq \mathbf{E}(X_T).$$

(Bei Martingalen: o.B.d.A. $S = 0$.)

Beweis. „$\Leftarrow$“: Sei $s \leq t, A \in \mathcal{F}_s$. Definiere $S := s \cdot \mathbb{1}_A + t \cdot \mathbb{1}_{A^C}$ und $T \equiv t \geq S$ Stoppzeiten.

„$\Rightarrow$“ $\mathbf{E}((X_t - X_s) \cdot \mathbb{1}_A) = \mathbf{E}(X_T - X_S) \geq 0 \quad \Rightarrow$ Behauptung. □

Korollar 2.5.4 (Optional Stopping)**.** *Sei X rechtsstetiges (Sub-)Martingal und T Stoppzeit. Dann ist auch $X^T = (X_{t \wedge T})_{t \geq 0}$ ein (Sub-)Martingal.*

3 Stetige Semimartingale und quadratische Variation

Ab nun stets: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ filtrierter Wahrscheinlichkeits-Raum, der den üblichen Voraussetzungen genügt.

3.1 Stetige Semimartingale

Definition 3.1.1. (i) *Ein Prozess X heißt stetig und wachsend (kurz $X \in \mathcal{A}^+$), falls er adaptiert ist und für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt: Die Abbildung*

$$X_\bullet(\omega) : t \mapsto X_t(\omega)$$

ist stetig und wachsend.

(ii) *Ein Prozess X heißt stetig und von* endlicher Variation *(oder stetig und lokal von beschränkter Variation), kurz $X \in \mathcal{A}$, falls er adaptiert ist und für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt:*
$t \mapsto X_t(\omega)$ ist stetig und von endlicher Variation, d.h. $\forall t \geq 0$ ist die Variation

$$S_t(\omega) = S_t(X(\omega)) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i}(\omega) - X_{t_{i-1}}(\omega) \right| : n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq t \right\}$$

von $s \mapsto X_s(\omega)$ auf $[0,t]$ <u>endlich</u>.

Lemma 3.1.2. $X \in \mathcal{A} \iff X = Y - Z$ *mit* $Y, Z \in \mathcal{A}^+$.

Beweis. $Y = \frac{1}{2}(S + X)$, $Z = \frac{1}{2}(S - X)$, mit $S =$ Variation von X. □

Definition 3.1.3. (i) *Ein Prozess X heißt* stetiges, lokales Martingal*, kurz $X \in \mathcal{M}_{loc}$, wenn er adaptiert und stetig ist, und wenn Stoppzeiten T_n existieren mit $T_n \nearrow \infty$ f.s. und X^{T_n} Martingal ($\forall n \in \mathbb{N}$).*

(ii) *Ein Prozess heißt* stetiges Semimartingal*, kurz $X \in \mathcal{S}$, falls $\exists M \in \mathcal{M}_{loc}, A \in \mathcal{A}$: $X = M + A$.*

Bemerkungen 3.1.4 (zu lokalen Martingalen)**.** (i) $X \in \mathcal{M}$ (d.h. stetiges Martingal) $\Rightarrow X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ [Wähle $T_n = \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$].

(ii) $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$, $X \geq 0 \Rightarrow X$ Supermartingal.
(denn $\mathbf{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(\lim_n X_{t \wedge T_n}|\mathcal{F}_s) \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_n \mathbf{E}(X_{t \wedge T_n}|\mathcal{F}_s) = X_s$).

(iii) $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}, X$ beschränkt $\Rightarrow X$ Martingal.

(iv) $X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ und $\forall s \geq 0$: ist $\{X_{T \wedge s} : T$ Stoppzeit$\}$ gleichgradig integrierbar.

(v) $\exists$ gleichgradig integrierbares $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}} : X \notin \mathcal{M}$.

Proposition 3.1.5. *Sei* $\mathcal{M}^0_{loc} := \{X \in \mathcal{M}_{loc} : X_0 = 0$ *f.s.*$\}$. *Dann ist* $\mathcal{M}^0_{loc} \cap \mathcal{A} = \{0\}$ *und* $\mathcal{S} = \mathcal{M}^0_{loc} \oplus \mathcal{A}$.
Mit anderen Worten: $X \in \mathcal{M}_{loc} \cap \mathcal{A} \Rightarrow X$ *konstant* $= X_0$.

Beweis. (i) Es genügt zu zeigen: $X \in \mathcal{M}^0 \cap \mathcal{A} \Rightarrow X = 0$, denn dann:

$$X \in \mathcal{M}^0_{\text{loc}} \cap \mathcal{A} \Rightarrow \exists (T_n), X^{T_n} \in \mathcal{M}^0 \cap \mathcal{A} \Rightarrow X^{T_n} = 0 \Rightarrow X = 0.$$

(ii) Genügt zu zeigen für X beschränkt mit global beschränkter Variation S, denn:
Sei $T_n = \inf\{t \geq 0 : |X_t| > n$ oder $S_t > n\}$
$\Rightarrow X^{T_n} \in \mathcal{M}^0 \cap \mathcal{A}$
$\Rightarrow X^{T_n} = 0 \Rightarrow X = 0$.

(iii) Sei $\varepsilon > 0$, $T_0 = 0$ und $T_{i+1} = \inf\{t \geq T_i : |X_t - X_{T_i}| > \varepsilon\}$. Wegen X stetig: $T_i \to \infty$ (für $i \to \infty$).
Nun gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X^2_{T_n}\right) &= \mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(X^2_{T_{i+1}} - X^2_{T_i}\right)\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(X_{T_{i+1}} - X_{T_i}\right)^2\right) + \sum_{i=0}^{n-1} 2 \cdot \mathbf{E}\left(\underbrace{\mathbf{E}\left(X_{T_{i+1}} - X_{T_i} | \mathcal{F}_{T_i}\right)}_{=0} \cdot X_{T_i}\right) \\
&\leq \varepsilon \cdot \mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|X_{T_{i+1}} - X_{T_i}\right|\right) \leq \varepsilon \cdot \mathbf{E}(S_\infty).
\end{aligned}$$

Wegen S_∞ beschränkt und ε beliebig gewählt war, folgt $E\left(X^2_{T_n}\right) = 0 \Rightarrow E\left(X^2_\infty\right) = 0 \Rightarrow$ (mit Doobscher L^2-Ungleichung)
$\mathbf{E}(\sup_{t \in \mathbb{R}_+} X_t^2) \leq 2^2 \cdot \mathbf{E}(X^2_\infty) = 0 \Rightarrow X \equiv 0$ f.s.

$\square$

3.2 Die Doob-Meyer Zerlegung

Satz 3.2.1 (Doob-Meyer)**.** *Sei X stetiges Supermartingal. Dann* $\exists M \in \mathcal{M}_0^{loc}$ *und* $A \in \mathcal{A}^+$ *mit*

$$X_t = M_t - A_t.$$

Hierbei sind M und A eindeutig (bis auf Ununterscheidbarkeit).

Beweis. (i) Eindeutigkeit: Sei $X_t = M_t - A_t = N_t - B_t$ mit $M, N \in \mathcal{M}_0^{\text{loc}}, A, B \in \mathcal{A}^+$.
$\Rightarrow M - N = A - B \in \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{A} = \{0\}$
$\Rightarrow$ Eindeutig!

(ii) Existenz im zeit-diskreten Fall: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diskretes Supermartingal,

$$\begin{aligned}
Y_n &:= \mathbf{E}(X_n - X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq 0, \quad \mathcal{F}_n\text{-messbar} \\
A_n &:= \sum_{k=1}^{n-1} Y_k \quad \text{wachsend, } \mathcal{F}_{n-1}\text{-messbar} \\
M_n &:= X_n + A_n \quad \text{Martingal.}
\end{aligned}$$

Für zeit-stetigen Fall folgendes Lemma: □

Lemma 3.2.2. *Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsender Prozess mit $A_0 = 0$, A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar und*

$$\mathbf{E}(A_\infty - A_n|\mathcal{F}_n) \leq K \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0)$$

$\Rightarrow \mathbf{E}(A_\infty^2) \leq 2K^2$.

Beweis. Sei $a_n = A_{n+1} - A_n$. O.B.d.A. $A_n \leq C, a_n \leq C$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A_\infty^2 &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(A_\infty - A_n)a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \\
\Rightarrow \mathbf{E}(A_\infty^2) &= 2 \cdot \mathbf{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(A_\infty - A_n|\mathcal{F}_n) \cdot a_n\right) - \mathbf{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right) \\
&\leq 2 \cdot K \cdot \mathbf{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \\
&= 2 \cdot K \cdot \mathbf{E}(A_\infty) \\
&\leq 2 \cdot K^2,
\end{aligned}$$

denn $\mathbf{E}(A_\infty) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(A_\infty - A_n|\mathcal{F}_0)) \leq K$. □

Lemma 3.2.3. *Seien $A^{(1)} = (A_n^{(1)})_n$ und $A^{(2)} = (A_n^{(2)})_n$ wie eben und $B = A^{(1)} - A^{(2)}$. Ferner sei W eine ZV mit $W \geq 0$, $\mathbf{E}(W^2) < \infty$ und*

$$|\mathbf{E}(B_\infty - B_k|\mathcal{F}_k)| \leq \mathbf{E}(W|\mathcal{F}_k).$$

Dann $\exists c$ mit:

$$\mathbf{E}(\sup_n B_n^2) \leq c \cdot \mathbf{E}(W^2) + c \cdot K \cdot \left[\mathbf{E}(W^2)\right]^{1/2}.$$

Beweis. Sei $b_n = B_{n+1} - B_n, a_n^{(i)} = A_{n+1}^{(i)} - A_n^{(i)} \quad (i = 1, 2; n \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{E}(B_\infty^2) &= 2 \cdot \mathbf{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(B_\infty - B_n|\mathcal{F}_n) \cdot b_n\right) - \mathbf{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2\right) \\ &\leq 2 \cdot \mathbf{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(W|\mathcal{F}_n) \cdot (a_n^{(1)} + a_n^{(2)})\right) \\ &\leq 2 \cdot \mathbf{E}\left(W \cdot \left(A_\infty^{(1)} + A_\infty^{(2)}\right)\right) \\ &\leq 2 \cdot \left[\mathbf{E}(W^2)\right]^{1/2} \cdot \left(\left[\mathbf{E}\left({A_\infty^{(1)}}^2\right)\right]^{1/2} + \left[\mathbf{E}\left({A_\infty^{(2)}}^2\right)\right]^{1/2}\right) \\ &\leq 4 \cdot \sqrt{2} \cdot K \cdot \left(\mathbf{E}(W^2)\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Betrachte schließlich die Martingale $M_n = \mathbf{E}(B_\infty|\mathcal{F}_n), W_n = \mathbf{E}(W|\mathcal{F}_n)$ und $X_n = M_n - B_n$.
$\Rightarrow |X_n| = |\mathbf{E}(B_\infty - B_n|\mathcal{F}_n)| \leq W_n$
$\Rightarrow$ (Doob'sche Ungleichung)

$$\mathbf{E}(\sup_n X_n^2) \leq \mathbf{E}(\sup_n W_n^2) \leq 2^2 \cdot \mathbf{E}(W_\infty^2) = 2^2 \cdot \mathbf{E}(W^2)$$

und

$$\mathbf{E}[\sup_n M_n^2] \leq 2^2 \cdot \mathbf{E}[M_\infty^2] = 2^2 \cdot \mathbf{E}[B_\infty^2].$$

Wegen $\sup_n |B_n| \leq \sup_n |X_n| + \sup_n |M_n|$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\sup_n |B_n|) &\leq 2^3 \cdot \mathbf{E}(W^2) + 2^3 \cdot \mathbf{E}(B_\infty^2) \\ &\leq 2^3 \cdot \mathbf{E}(W^2) + c \cdot K \cdot \left(\mathbf{E}(W^2)\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

□

Fortsetzung des Beweises des Satzes von Doob-Meyer.

(iii) Sei X stetiges und beschränktes Supermartingal und konstant für $t \geq N$
$\Rightarrow$ fast alle Trajektorien sind gleichmäßig stetig.

(iv) Fixiere $k \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathcal{F}_n^k = \mathcal{F}_{n \cdot 2^{-k}} \text{ und } A_n^k = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{E}(X_{j \cdot 2^{-k}} - X_{(j+1)2^{-k}}|\mathcal{F}_j^k)$$

(diskrete Doob-Meyer Zerlegung aus (ii)).
Für $t \geq 0$ mit $(n-1)2^{-k} < t \leq n2^{-k}$ sei $\mathcal{F}_t^k = \mathcal{F}_n^k$ und $\overline{A}_t^k = A_n^k$.
Sei $W(\delta) = \sup\{|X_t - X_s| : s \leq N, s \leq t \leq s + \delta\}$. Wegen X beschränkt, ist auch $W(\delta)$ beschränkt. Da die Trajektorien von X fast sicher gleichmäßig stetig sind, gilt: $W(\delta) \to 0$ f.s. für $\delta \to 0$.
$\Rightarrow W(\delta) \to 0$ in L^2 für $\delta \to 0$.

(v) Behauptung: $\overline{A}_t^k$ konvergiert in L^2 für $k \to \infty$, gleichmäßig in t. Mit anderen Worten, $\mathbf{E}(\sup_t |\overline{A}_t^k - \overline{A}_t^l|^2) \to 0$ für $k, l \to \infty$.

Denn: Sei $l \geq k$. Die Prozesse $\overline{A}^k$ und $\overline{A}^l$ sind jeweils konstant auf den Intervallen $]n2^{-l}, (n+1)2^{-l}]$.
$\Rightarrow \sup_t \left|\overline{A}_t^k - \overline{A}_t^l\right| = \sup_n \left|\overline{A}_{n2^{-l}}^k - \overline{A}_{n2^{-l}}^l\right|$.
Sei $t = n \cdot 2^{-l}$ und $u = \inf\{m \cdot 2^{-k} \geq t : m \in \mathbb{N}_0\}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbf{E}\left(\overline{A}_\infty^l - \overline{A}_t^l | \mathcal{F}_t^l\right) &= \mathbf{E}(A_\infty^l - A_n^l | \mathcal{F}_{n2^{-l}}) \\
&= \mathbf{E}(X_t - X_\infty | \mathcal{F}_t)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\overline{A}_\infty^k - \overline{A}_t^k | \mathcal{F}_t^l\right) &= \mathbf{E}\left(A_\infty^k - A_{u2^k}^k | \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(A_\infty^k - A_{u2^k}^k | \mathcal{F}_u\right) \Big| \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_u - X_\infty | \mathcal{F}_u) | \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbf{E}(X_u - X_\infty | \mathcal{F}_t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left|\mathbf{E}\left(\overline{A}_\infty^l - \overline{A}_t^l \Big| \mathcal{F}_t^l\right) - \mathbf{E}\left(\overline{A}_\infty^k - \overline{A}_t^k \Big| \mathcal{F}_t^l\right)\right| &= \mathbf{E}(|X_t - X_u| \; | \mathcal{F}_t) \\
&\leq \mathbf{E}(W(2^{-k}) | \mathcal{F}_t).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 3.2.3 folgt:

$$\mathbf{E}\left(\sup_t \left|\overline{A}_t^k - \overline{A}_t^l\right|\right) \leq c \cdot \mathbf{E}(W(2^{-k})^2) + c' \cdot \mathbf{E}(W(2^{-k})^2)^{1/2} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

(vi) Behauptung $A := \lim_{k\to\infty} \overline{A}^k$ ist stetig.

Denn $\overline{A}^k$ hat Sprünge $\Delta \overline{A}_t^k = \mathbf{E}(X_{(n-1)2^{-k}} - X_{n2^{-k}} | \mathcal{F}_{(n-1)2^{-k}})$ an den Stellen $t = n2^{-k}$, die beschränkt sind durch

$$\mathbf{E}(W(2^{-k}) | \mathcal{F}_{(n-1)2^{-k}}) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Daher

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\sup_t (\Delta \overline{A}_t^k)^2] &\leq \mathbf{E}[\underbrace{\sup_n \mathbf{E}(W(2^{-k}) | \mathcal{F}_{(n-1)2^{-k}})}_{\text{Martingal in } n}]^2 \\
&\leq 2^2 \cdot \mathbf{E}(W(2^{-k})^2) \underset{k\to\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Übergang zu Teilfolgen:
$\sup_t \Delta \overline{A}_t^{k_j} \to 0$ f.s. $\quad (k_j \to \infty)$
$\Rightarrow A$ stetig.

(vii) Behauptung: $M := X + A$ ist Martingal.

Denn $\forall k \in \mathbb{N}, \forall s, t \in D_k = 2^{-k}\mathbb{N}_0, \forall B \in \mathcal{F}_s, s < t$

$$\int_B M_t \, d\mathbf{P} = \int_B M_s \, d\mathbf{P} \quad \text{nach Teil (ii)} \tag{3.1}$$

$\Rightarrow \forall s, t \in D = \bigcup D_k, s < t, \forall B \in \mathcal{F}_s$ gilt (3.1).
$\Rightarrow \forall s, t \in \mathbb{R}_+, s < t : \exists s_k, t_k \in D, s \leq s_k < t_k, s_k \to s, t_k \to t : \forall B \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{s_k}$:

$$\int_B M_t \, d\mathbf{P} = \lim \int_B M_{t_k} \, d\mathbf{P} = \lim \int_B M_{s_k} \, d\mathbf{P} = \int_B M_s \, d\mathbf{P} \tag{3.2}$$

denn M ist stetig und beschränkt in L^2.

(viii) Allgemeiner Fall: X beliebiges stetiges Supermartingal.

Definiere $T_N := \inf\{t \geq 0 : |X_t| > N\}$. Für alle $N \in \mathbb{N}$ ist T_N eine Stoppzeit, und $T_N \nearrow \infty$ für $N \to \infty$. Ferner ist X^{T_N} ein stetiges und beschränktes Supermartingal und konstant für $t \geq N$.
$\Rightarrow \exists M^N, A^N : X^{T_N} = M^N - A^N$ (mit $M^N \in \mathcal{M}_0, A^N \in \mathcal{A}_+$).

Wegen Eindeutigkeit $\forall K > N$:
$(M^K)^{T_N} - (A^K)^{T_N} = (X^{T_K})^{T_N} = X^{T_N} = M^N - A^N$
$\Rightarrow M^K = M^N, A^K = A^N$ auf $[0, N]$
$\Rightarrow \exists M, A : M^N = (M)^{T_N}, A^N = (A)^{T_N}, \quad (\forall N)$
$\Rightarrow M \in \mathcal{M}_0^{\text{loc}}, A \in \mathcal{A}_+, X = M - A.$

□

Korollar 3.2.4. *Jedes stetige Supermartingal ist stetiges Semimartingal.*

3.3 Quadratische Variation

Satz 3.3.1. (i) $\forall M \in \mathcal{M}_{loc}^0 : \exists! \langle M \rangle \in \mathcal{A}_0 : M^2 - M_0^2 - \langle M \rangle \in \mathcal{M}_{loc}$.

(ii) $\forall M, N \in \mathcal{M}_{loc} : \exists! \langle M, N \rangle \in \mathcal{A}_0 : M \cdot N - M_0 N_0 - \langle M, N \rangle \in \mathcal{M}_{loc}$
Es gilt: $\langle M, N \rangle = \frac{1}{4} (\langle M + N \rangle - \langle M - N \rangle)$.

Beweis. Trivial. ($M \in \mathcal{M}_{\text{loc}} \Rightarrow M^2$ lokales Submartingal $\Rightarrow$ (Doob-Meyer-Zerlegung) $M^2 = N + A$.) □

Definition 3.3.2. $\langle M \rangle = \langle M, M \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ *heißt zu M gehöriger* wachsender Prozeß *oder* quadratische(r) Variation(sprozess) *von M.*
$\langle M, N \rangle = (\langle M, N \rangle_t)_{t \geq 0}$ *heißt* Klammerprozeß *zu M und N oder quadratische Kovariation von M und N.*
Für $M, N \in \mathcal{M}_{loc}$ *sei* $\langle M, N \rangle := \langle M - M_0, N - N_0 \rangle$

Proposition 3.3.3. $\forall M, N \in \mathcal{M}_{loc}$:

(i) $\langle M, N\rangle$ *hängt symmetrisch, bilinear und positiv semidefinit von M und N ab.*

(ii) *Für jede Stoppzeit T gilt:*
$\langle M, N\rangle^T = \langle M, N^T\rangle = \langle M^T, N^T\rangle$.

(iii) $\langle M\rangle = \langle M - M_0\rangle$.

(iv) $\langle M\rangle = 0 \Leftrightarrow M$ *konstant.*

Beweis. (i) Trivial.

(ii) Optional Stopping $\Rightarrow (M^2 - \langle M\rangle)^T = (M^T)^2 - \langle M\rangle^T \in \mathcal{M}_{\text{loc}} \Rightarrow \langle M\rangle^T = \langle M^T\rangle$.
Rest mit Polarisation.

Bei (iii) und (iv): Nach (ii) o.B.d.A. $M - M_0$ beschränkt, $\Rightarrow \in \mathcal{M}$

(iii) $(M - M_0)M_0 \in \mathcal{M}$, denn $\mathbf{E}((M_t - M_0)M_0|\mathcal{F}_s) = M_0\mathbf{E}(M_t - M_0|\mathcal{F}_s) = M_0 \cdot (M_s - M_0)$
$\Rightarrow (M - M_0)^2 - \langle M\rangle = M^2 - M_0^2 - \langle M\rangle - 2(M - M_0)M_0 \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$

(iv) $\langle M\rangle = 0$ auf $[0, t] \Rightarrow (M - M_0)^2$ Martingal auf [0,t]
$\Rightarrow \mathbf{E}(\sup\limits_{0\le s\le t} (M_s - M_0)^2) \le 4 \cdot \mathbf{E}((M_t - M_0)^2) = 0$
$\Rightarrow M$ konstant auf $[0, t]$.

$\square$

Beispiel 3.3.4. Es sei X stetiger, zentrierter, quadrat-integrierbarer Prozess mit unabhängigen Zuwächsen. Dann ist $X \in \mathcal{M}$ und (unabhängig von ω)

$$\langle X\rangle_t = \text{Var}(X_t - X_0) = \mathbf{E}((X_t - X_0)^2) \quad \text{f.s.}$$

Beispiel 3.3.5. Sei M eine eindimensionale Brownsche Bewegung $\Rightarrow \langle M\rangle_t = t \quad (\forall t \ge 0)$.

Für eine Partition $\Delta = \{t_0, t_1, \dots\}$ mit $t_k \nearrow \infty$ und $0 = t_0 \le t_1 \le \dots$ und einen stochastischen Prozess M definiert man die *quadratische Variation* von M auf Δ durch

$$Q_t^\Delta = Q_t^\Delta(M) = \sum_{k=1}^{\infty} |M_{t_k\wedge t} - M_{t_{k-1}\wedge t}|^2.$$

Als Feinheit von Δ definiert man $\|\Delta\| = \sup\limits_k |t_k - t_{k-1}|$.

Satz 3.3.6. *Seien $M \in \mathcal{M}_{loc}$ und $t \ge 0$. Dann gilt*

$$Q_t^\Delta \to \langle M\rangle_t \quad \mathbf{P} - \textit{stochastisch für } \|\Delta\| \to 0.$$

D.h. $\forall \varepsilon > 0, \eta > 0, \forall t \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : \forall$ *Partitionen* Δ *mit* $\|\Delta\| \le \delta$:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\le s\le t} |Q_s^\Delta - \langle M\rangle_s| > \varepsilon\right) < \eta.$$

Beweis. Seien M und t fest, und für $\delta > 0$

$$\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots\} \text{ mit } \|\Delta\| \le \delta.$$

Annahme: M und $\langle M\rangle$ beschränkt.
Sei $a_i^{(1)} = (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2$, $a_i^{(2)} = \langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i}$, $b_i = a_i^{(1)} - a_i^{(2)}$.
$A_k^{(1)} = \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i^{(1)} = Q_{t_k}^{\Delta}(M)$, $A_k^{(2)} = \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i^{(2)} = \langle M\rangle_{t_k}$, $B_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} b_i = A_k^{(1)} - A_k^{(2)} = Q_{t_k}^{\Delta}(M) - \langle M\rangle_{t_k}$, $\mathcal{F}_k = \sigma(M_{t_{i+1}} : i \le k)$.
($\Rightarrow a_k^{(1)}, a_k^{(2)}$ messbar bzgl. $\mathcal{F}_k$).
Da o.B.d.A. M und $\langle M\rangle$ beschränkt, sind die Voraussetzungen von Lemma 3.2.3 erfüllt.
Da M und $\langle M\rangle$ gleichmäßig stetig auf $[0,t]$, gilt

$$W(\delta) := \sup_{\substack{s\le t\\ \varepsilon\le\delta}} \left(|M_{s+\varepsilon} - M_s|^2 + |\langle M\rangle_{s+\varepsilon} - \langle M\rangle_s|\right) \to 0$$

$\mathbf{P}$-f.s. (und in L^2, da beschränkt!) für $\delta \to 0$.
Nun gilt $B_\infty - B_k = \sum\limits_{i=k}^{\infty} b_i$ und $\mathbf{E}(b_i|\mathcal{F}_k) = 0$ für $i > k$

$$\begin{aligned}\Rightarrow |\mathbf{E}(B_\infty - B_k|\mathcal{F}_k)| &= |b_k| \\ &\le a_k^{(1)} + a_k^{(2)} \\ &= \mathbf{E}(a_k^{(1)} + a_k^{(2)}|\mathcal{F}_k) \\ &\le \mathbf{E}(W(\delta)|\mathcal{F}_k)\end{aligned}$$

Mit Lemma 3.2.3:

$$\mathbf{E}(\sup_k B_k^2) \le c \cdot \mathbf{E}(W(\delta)^2) + c' \cdot \mathbf{E}(W(\delta)^2)^{1/2} \to 0$$

für $\delta \to 0$.
$\Rightarrow \mathbf{E}(\sup\limits_{s\le t} |Q_t^{\Delta}(M) - \langle M\rangle_s|^2) \le 2\mathbf{E}(\sup\limits_k B_k^2) + 2 \cdot \mathbf{E}(W(\delta)^2) \to 0$ für $\delta \to 0$.
$\Rightarrow L^2$- und stochastische Konvergenz (gleichmäßig in $s \in [0,t]$) von $Q_s^{\Delta}(M)$ gegen $\langle M\rangle_s$.
Lokalisierungsargument:
Ist M oder $\langle M\rangle$ nicht beschränkt, dann definiere $T_n := \inf\{t \ge 0 : |M_t| > n$ oder $\langle M\rangle_t > n\}$
$\Rightarrow \mathbf{P}(\sup\limits_{s\le t} |Q_s^{\Delta}(M) - \langle M\rangle_s| > \varepsilon)$
$\le \mathbf{P}(\sup\limits_{s\le t} |\underbrace{Q_s^{\Delta}(M^{T_n}) - \langle M^{T_n}\rangle_s| > \varepsilon}_{\text{für } n \text{ fest: } \le\eta/2 \text{ für } \|\Delta\| \text{ hinr. klein}}) + \underbrace{\mathbf{P}(T_n < t)}_{<\eta/2 \text{ für } n \text{ hinr. groß}} \quad (\forall n, \varepsilon)$ □

Korollar 3.3.7. *$\forall M, N \in \mathcal{M}_{loc}, \forall t \ge 0, \forall$ Partitionen Δ_n mit $\|\Delta_n\| \to 0$:*

$$Q_t^{\Delta_n}(M,N) \to \langle M,N\rangle_t \text{ stochastisch } (n \to \infty),$$

wobei $Q_t^{\Delta_n}(M,N) = \sum\limits_{t_i\in\Delta_n} (M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t}) \cdot (N_{t_{i+1}\wedge t} - N_{t_i\wedge t})$.

Satz 3.3.8. (i) *Für fast alle* $\omega \in \Omega, \forall a < b$:

$$\langle M\rangle_a(\omega) = \langle M\rangle_b(\omega) \Leftrightarrow M_t(\omega) = M_a(\omega) \quad (\forall t \in [a,b]).$$

(ii) *Für fast alle* ω *mit* $\langle M\rangle_\infty(\omega) := \sup_t \langle M_t\rangle_t(\omega) < \infty$ *gilt:* $\lim_{t\to\infty} M_t(\omega)$ *existiert (und ist endlich).*

Beweis. (i) " $\Leftarrow$ " klar (M_0 konstant $\Rightarrow$ Var. $= 0 \Rightarrow$ Quadratische Variation $= 0$).
" $\Rightarrow$ ": Für $q \in \mathbf{Q}$ betrachte
$N_t = M_{t+q} - M_t \quad (\mathcal{F}_{t+q})_{t\geq 0}$-Martingal
$\langle N\rangle_t = \langle M\rangle_{t+q} - \langle M\rangle_t$.
$T := \inf\{t > 0 : \langle N\rangle_t > 0\}$ ist Stoppzeit, $N^T \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ mit

$$\langle N^T\rangle_t = \langle N\rangle_{t\wedge T} = 0 \quad (\forall t \geq 0)$$

$\Rightarrow N^T$ ist f.s. konstant auf $[0,\infty[$,
$\Rightarrow N$ ist f.s. konstant auf $[0,T]$,
$\Rightarrow M$ ist f.s. konstant auf $[q, q+T] \quad T = T(q)$,
$\Rightarrow M$ ist f.s. konstant auf $\bigcup_{q\in\mathbf{Q}} [q, q+T(q)]$.
Aber: $\langle M\rangle_0$ konstant auf $[a,b] \Rightarrow [a,b] \subset [a, T(a)]$
$\Rightarrow \exists q_i \in \mathbf{Q} : [a,b] \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} [q_i, T(q_i)]$.

(ii) O.B.d.A. $M_0 = 0, T_n = \inf\{t \geq 0 : \langle M\rangle_t > n\} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\sup_{t\geq 0} M^2_{t\wedge T_n}) &\leq 2^2 \sup_t \mathbf{E}(M^2_{t\wedge T_n}) \\ &= 4 \cdot \sup_t \mathbf{E}\langle M\rangle_{t\wedge T_n} \\ &\leq 4n\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (Martingalkonvergenzsatz): $\exists$ f.s. $M_{T_n} = \lim_{t\to\infty} M_{t\wedge T_n} \in \mathbb{R}$ auf Ω,

$$M_{T_n} = \lim_{t\to\infty} M_t = M_\infty \text{ auf } \{T_n = \infty\}.$$

$\Rightarrow \exists$ f.s. $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ auf $\bigcup_n \{T_n = \infty\} = \{\langle M\rangle_\infty < \infty\}$.

□

Definition 3.3.9. *Für* $X, Y \in \mathcal{S}$ *mit* $X = M + A$, $Y = N + B$, $M, N \in \mathcal{M}_{loc}$, $A, B \in \mathcal{A}_0$ *definiere* $\langle X, Y\rangle := \langle M, N\rangle$ *und* $\langle X\rangle := \langle M\rangle$.

Satz 3.3.10. *Dann gilt* $\forall X, Y \in \mathcal{S}, \forall t \geq 0, \forall$ *Partitionen* Δ_n *mit* $\|\Delta_n\| \to 0$

$$Q_t^{\Delta_n}(X,Y) \to \langle X, Y\rangle_t \quad \mathbf{P}\text{-stochastisch.}$$

Beweis. Wir zeigen $Q_t^{\Delta_n}(M,A) \to 0$ und $Q_t^{\Delta_n}(A,A) \to 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
|Q_t^{\Delta_n}(M,A)| &= \left| \sum_{t_i \in \Delta_n} (M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t}) \cdot (A_{t_{i+1}\wedge t} - A_{t_i \wedge t}) \right| \\
&\leq \sup_{t_i} |M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t}| \cdot \sum_{t_i} |A_{t_{i+1}\wedge t} - A_{t_i \wedge t}| \\
&\leq \sup_{t_i} |M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t}| \cdot \underbrace{S_t(A)}_{<\infty} \to 0
\end{aligned}$$

wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von M auf $[0,t]$ und da die Variation $S_t = S_t(A)$ endlich ist.
Analog für $Q_t^{\Delta_n}(A,A)$. □

Korollar 3.3.11. $\forall X, Y \in \mathcal{S}$, $\forall t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\langle X, Y \rangle_t &\leq (\langle X \rangle_t \cdot \langle Y \rangle_t)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2} (\langle X \rangle_t + \langle Y \rangle_t) .
\end{aligned}$$

Beweis. Folgt aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung für $Q_t^{\Delta}(X,Y)$. □

3.4 Stetige L^2-beschränkte Martingale

Definition 3.4.1.

$$H^2 := \{M \in \mathcal{M} : \sup_t \mathbf{E}(M_t^2) < \infty\}$$

ist der Raum der stetigen L^2-beschränkten Martingale.

Proposition 3.4.2. (i) *H^2 ist ein Hilbert-Raum bzgl. der Norm*

$$\|M\|_{H^2} = \left(\mathbf{E} M_\infty^2\right)^{1/2} = \lim_{t\to\infty} \left(\mathbf{E} M_t^2\right)^{1/2} .$$

(ii) *Äquivalent zu dieser Norm ist die Norm*

$$\|M_\infty^*\|_2 = \mathbf{E}\left(\sup_t |M_t^2|\right)^{1/2} .$$

(iii) *Für $M \in H_0^2 = \{X \in H^2 : X_0 = 0\}$ gilt*

$$\|M\|_{H^2} = (\mathbf{E}\langle M \rangle_\infty)^{1/2} .$$

Beweis. (i), (ii): Zunächst ist klar:

$$\begin{aligned} M \in H^2 \quad &\Rightarrow \quad M_\infty^* = \sup_t |M_t| \in L^2 \\ &\Rightarrow \quad \exists M_\infty \in L^2 : M_t = \mathbf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M_\infty^2) &= \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}(M_t^2) \\ &= \sup_t \mathbf{E}(M_t^2) \\ &\leq \mathbf{E}(\sup_t M_t^2) \\ &= \mathbf{E}({M_\infty^*}^2) \\ &\overset{\text{Doob}}{\leq} 2^2 \cdot \sup_t \mathbf{E}(M_t^2) \\ &= 2^2 \cdot \|M\|_{H^2}^2. \end{aligned}$$

(iii) Ferner gilt $\forall t : \mathbf{E}(M_t^2) = \mathbf{E}\langle M\rangle_t + \mathbf{E}(M_0^2)$, also

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M_\infty^2) &= \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}(M_t^2) \\ &= \lim_t \mathbf{E}\langle M\rangle_t \\ &= \mathbf{E}\langle M\rangle_\infty, \text{ falls } M_0 = 0. \end{aligned}$$

Seien nun $M^n \in H^2$, mit $\|M^n - M^k\|_{H^2} \to 0$ für $n, k \to \infty$
$\Rightarrow \exists M_\infty^n, M_\infty^k \in L^2$ mit $M_t^n = \mathbf{E}(M_\infty^n|\mathcal{F}_t)$, $M_t^k = \mathbf{E}(M_\infty^k|\mathcal{F}_t)$

$$\|M_\infty^n - M_\infty^k\|_{L^2} = \|M^n - M^k\|_{H^2} \to 0$$

$\Rightarrow$ (Vollständigkeit von $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$):
$\exists M_\infty \in L^2 : M_\infty^n \to M_\infty$ in L^2.
Def. $M_t := \mathbf{E}(M_\infty|\mathcal{F}_t)$ Martingal
$\Rightarrow$ (Doob):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\sup_t |M_t^n - M_t|^2) &\leq 4 \cdot \mathbf{E}(|M_\infty^n - M_\infty|^2) \\ &= 4 \cdot \|M^n - M\|_{H^2} \to 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(n_k)_k$:

$$\sup_t |M_t^{n_k} - M_t| \to 0 \text{ f.s. für } k \to \infty$$

$\Rightarrow t \mapsto M_t$ f.s. stetig
$\Rightarrow M \in \mathcal{M} \Rightarrow M \in H^2$.

□

4 Stochastische Integration

4.1 Das Lebesgue-Stieltjes-Integral

Betrachte $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ rechtsstetig.

Satz 4.1.1. *Äquivalent sind:*

(i) *g ist von endlicher Variation.*

(ii) $\forall t \geq 0 : S_t(g) < \infty$ *mit*

$$S_t(g) := \sup\left\{S_t^{\Delta}(g) : \Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq t\right\}$$

und

$$S_t^{\Delta}(g) = \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|.$$

(iii) $\exists$ *g_1, g_2 rechtsstetig und wachsend, sodass $g = g_1 - g_2$.*

(iv) $\exists$ *signiertes Radon-Maß μ auf $\mathbb{R}_+$ mit*

$$\mu([0,t]) = g(t) \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+) \tag{4.1}$$

Beweis. $(i) \iff (ii)$ per def., $\iff (iii)$ klar
$(iii) \iff (iv)$: Sei o.B.d.A. g wachsend, $\mu \geq 0$.
Dann ist g die Verteilungsfunktion von μ. □

Bemerkung 4.1.2. Durch (4.1) ist μ bzw. g eindeutig bestimmt.

Definition 4.1.3. *Sei $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ rechtsstetig und von endlicher Variation und $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt und Borel-messbar. Dann ist das Lebesgue-Stieltjes-Integral*

$$\int_0^t f \,\mathrm{d}g = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}g(s) = \int_0^t f(s) g(\,\mathrm{d}s) \qquad \textit{von } f \textit{ bzgl. } g$$

definiert durch

$$\int_{]0,t]} f(s)\mu(\,\mathrm{d}s)$$

mit $\mu = \mu^g$ = signiertes Radon-Maß zu g.

Bemerkungen 4.1.4. (i) Ist $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, so gilt:

$$\mathrm{d}g(s) = g'(s)\ \mathrm{d}s,$$

d.h. das Lebesgue-Stieltjes-Integral

$$\int\limits_0^t f(s)\ \mathrm{d}g(s)$$

ist ein gewöhnliches Lebesgue-Integral

$$\int\limits_0^t f(s)g'(s)\ \mathrm{d}s$$

mit der Dichte g'.

(ii) Sind g und h stetig und von beschränkter Variation, so gilt die Produktregel

$$\mathrm{d}(gh)(s) = g(s)\ \mathrm{d}h(s) + h(s)\ \mathrm{d}g(s).$$

Satz 4.1.5. *Sei g rechtsstetig und wachsend, f linksstetig und lokal beschränkt und $t \geq 0$. Dann ist*

$$\int\limits_0^t f\ \mathrm{d}g = \lim_{\|\Delta\|\to 0} I_t^\Delta(f,g)$$

mit $I_t^\Delta(f,g) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(t_k)\cdot(g(t_{k+1}) - g(t_k))$.
Bem.: Hierbei kann man $f(t_k)$ durch $f(t_{k+1})$ ersetzen, falls f stetig ist.

Beweis. Sei

$$f^\Delta = \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)\cdot \mathbb{1}_{]t_k,t_{k+1}]}$$

und

$$\sup_{s\in[0,t]} |f(s)| = C < \infty.$$

Dann gilt für $\|\Delta\| \to 0$:

$$f^\Delta(s) \to f(s) \quad (\forall s \in]0,t]) \text{ (wegen Linksstetigkeit von } f).$$

Ferner: $|f^\Delta(s)| \leq C \quad (\forall s \in]0,t])$

$$\Rightarrow I_t^\Delta(f,g) = \int\limits_{]0,t]} f^\Delta(s)\mu^g(\ \mathrm{d}s) \underset{\|\Delta\to 0\|}{\longrightarrow} \int\limits_{]0,t]} f(s)\mu^g(\ \mathrm{d}s) = \int\limits_0^t f\ \mathrm{d}g.$$

$\square$

Wir wollen nun Integrale $\int_0^t X_s \, \mathrm{d}A_s$ definieren mit $A \in \mathcal{A}$ und $X \in \mathcal{B} := \{X : X \text{ adaptiert, linksstetig, pfadweise lokal beschränkt}\}$.

Definition 4.1.6. *Für $A \in \mathcal{A}$ und $X \in \mathcal{B}$ heißt die pfadweise definierte ZV*

$$(X \bullet A)_t = \int_0^t X \, \mathrm{d}A = \int_0^t X_s \, \mathrm{d}A_s : \quad \omega \mapsto \int_0^t X_s(\omega) \, \mathrm{d}A_s(\omega)$$

stochastisches Integral *von X bzgl. A (auf $[0,t]$). Dabei ist X der* Integrand *und A der* Integrator.
Der Prozess $X \bullet A = ((X \bullet A)_t)_{t \geq 0}$ heißt unbestimmtes stochastisches Integral.

Satz 4.1.7. *Für $A \in \mathcal{A}$ und $X, Y \in \mathcal{B}$ gilt:*

(i) $X \bullet A \in \mathcal{A}_0$.

(ii) $X \bullet A$ *ist bilinear in A und X.*

(iii) $(X \bullet A)^T = X \bullet A^T$ *für alle Stoppzeiten T (Stopp-Formel).*

(iv) $Y \bullet (X \bullet A) = (YX) \bullet A$ *(Assoziativität)*

Beweis. (ii), (iii), (iv) einfache Übungen.

(i) Klar: $(X \bullet A)_0 = 0$ und $t \mapsto \int_0^t X_s \, \mathrm{d}A_s$ pfadweise stetig (da A stetig).
Adaptiertheit: $\int_0^t X_x \, \mathrm{d}A_s = \lim_{n \to \infty} I_t^{\Delta_n}(X, A) \in \mathscr{F}_t$ für eine Folge von Partitionen Δ_n mit $\|\Delta_n\| \to 0$.
Endliche Variation:

$$S_t((X \bullet A)(\omega)) \leq \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s(\omega)| \cdot S_t(A(\omega)) < \infty.$$

□

4.2 Das Itô-Integral für Elementarprozesse

Ziel: Definition von $(X \bullet M)_\cdot = \int_0^\cdot X_s \, \mathrm{d}M_s$ für $M \in H^2$ und $X \in \mathcal{E}$.

Definition 4.2.1. $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ *heißt* Elementarprozess, *kurz $X \in \mathcal{E}$, falls: $\exists\, (t_i)_i$, $(Z_i)_i$, $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots, t_i \nearrow \infty$, Z_i $\mathcal{F}_{t_i}$-messbar, Z_{-1} $\mathcal{F}_0$-messbar, Z_i gleichmäßig beschränkt, sodass*

$$X = Z_{-1} \cdot \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{\infty} Z_i \cdot \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}.$$

Definition 4.2.2. *Für $M \in \mathcal{S}$ und $X \in \mathcal{E}$ definieren wir das* stochastische Integral $(X \bullet M)_\cdot = \int\limits_0^\cdot X \,\mathrm{d}M = \int\limits_0^\cdot X_s \,\mathrm{d}M_s$ *pfadweise wie folgt:*

$$\begin{aligned}(X \bullet M)_t &= \sum_{i=0}^{\infty} Z_i \cdot (M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} Z_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + Z_n \cdot (M_t - M_{t_n})\end{aligned}$$

für $t \in [t_n, t_{n+1}[$.

Bemerkung 4.2.3. Für $M \in \mathcal{A}$ stimmt das mit der bisherigen Definition (Lebesgue-Stieltjes) überein.

Satz 4.2.4. *Für $M \in H^2$ und $X \in \mathcal{E}$ gilt:*

(i) $X \bullet M \in H_0^2$.

(ii) $\langle X \bullet M\rangle_\cdot = \int\limits_0^\cdot X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s = (X^2 \bullet \langle M\rangle)_\cdot$.

(iii) $\|X \bullet M\|_{H^2}^2 = \mathbf{E}\left(\int\limits_0^\infty X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right)$.

Beweis. (i) Offenbar $X \bullet M$ adaptiert, stetig, $(X \bullet M)_0 = 0$.
Ferner für $s \in [t_{k-1}, t_k[$, $t \in [t_n, t_{n+1}[$:

$$\begin{aligned}(X \bullet M)_t &= (X \bullet M)_s \\ &= \sum_{i=k}^{n-1} Z_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + Z_n(M_t - M_{t_n}) + Z_{k-1}(M_{t_k} - M_s) \\ &\Rightarrow \mathbf{E}((X \bullet M)_t - (X \bullet M)_s|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbf{E}\left(\sum_{i=k}^{n-1} Z_i \cdot \mathbf{E}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\mathcal{F}_{t_i}) + Z_n \cdot \mathbf{E}(M_t - M_{t_n}|\mathcal{F}_{t_n})|\mathcal{F}_s\right) \\ &\quad + Z_{k-1} \cdot \mathbf{E}(M_{t_k} - M_s|\mathcal{F}_s) \\ &= 0.\end{aligned}$$

(ii) O.B.d.A. $s = t_k, t = t_{n+1}$ (ergänze $\{t_i\}$ um zwei Punkte).

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}((X \bullet M)_t^2 - (X \bullet M)_s^2 | \mathcal{F}_s) \\
= \; & \mathbf{E}([(X \bullet M)_t - (X \bullet M)_s]^2 | \mathcal{F}_s) + \\
& +2 \underbrace{\mathbf{E}[((X \bullet M)_s) \cdot [(X \bullet M)_t - (X \bullet M)_s] | \mathcal{F}_s]}_{=0 \text{ nach (i)}} \\
= \; & \mathbf{E}([(X \bullet M)_t - (X \bullet M)_s]^2 | \mathcal{F}_s) \\
= \; & \mathbf{E}\left(\left[\sum_{i=k}^{n} Z_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \right]^2 \middle| \mathcal{F}_s \right) \\
= \; & \mathbf{E}\left(\sum_i Z_i^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \middle| \mathcal{F}_s \right) + \\
& +2\mathbf{E}\left(\sum_{i<j} Z_i Z_j (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) \middle| \mathcal{F}_s \right) \\
= \; & \mathbf{E}\left(\int_s^t X_r^2 \, \mathrm{d}\langle M \rangle_r \middle| \mathcal{F}_s \right) + \\
& +2\mathbf{E}\left(\sum_{i<j} Z_i Z_j (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \underbrace{\mathbf{E}(M_{t_{j+1}} - M_{t_j} | \mathcal{F}_{t_j})}_{=0} \middle| \mathcal{F}_s \right) \\
= \; & \mathbf{E}\left(\int_s^t X_r^2 \, \mathrm{d}\langle M \rangle_r \middle| \mathcal{F}_s \right).
\end{aligned}$$

(iii) $\|X \bullet M\|_{H^2}^2 = \mathbf{E}\langle X \bullet M \rangle_\infty = \mathbf{E} \int_0^\infty X_r^2 \, \mathrm{d}\langle M \rangle_r$.

□

Korollar 4.2.5. *Sind $X_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, Elementarprozesse mit*

$$\mathbf{E} \int_0^\infty (X_t^n - X_t^k)^2 \, \mathrm{d}\langle M \rangle_r \to 0 \quad \text{für } n, k \to \infty,$$

so gilt:

$$\|(X^n \bullet M) - (X^k \bullet M)\|_{H^2}^2 = \mathbf{E}(\sup_t [(X^n \bullet M)_t - (X^k \bullet M)_t]^2) \to 0 \quad \text{für } n, k \to \infty.$$

Beweis. Mit

$$X^n, X^k \in \mathcal{E}$$

ist auch

$$X^n - X^k \in \mathcal{E}$$

und

$$X^n \bullet M - X^k \bullet M = (X^n - X^k) \bullet M \in H_0^2.$$

Ferner

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\sup_t[(X^n \bullet M)_t - (X^k \bullet M)_t]^2) &= \mathbf{E}(\sup_t[(X^n - X^k) \bullet M]_t^2) \\
&\leq 4 \cdot \|(X^n - X^k) \bullet M\|_{H^2} \\
&= 4\mathbf{E} \int_0^\infty (X_t^n - X_t^k)^2 \, \mathrm{d}\langle M \rangle_t \to 0.
\end{aligned}$$

□

Satz 4.2.6 (Kunita-Watanabe-Identität und -Ungleichung)**.** *Für $M, N \in H^2$ und $X, Y \in \mathcal{E}$ gilt:*

(i) $\langle X \bullet M, Y \bullet N \rangle = \int_0 X_s Y_s \, \mathrm{d}\langle M, N \rangle_s = (XY) \bullet \langle M, N \rangle$

und

(ii) $|\mathbf{E}\langle X \bullet M, Y \bullet N \rangle_\infty| \leq \mathbf{E} \int_0^\infty |X_s Y_s|| \, \mathrm{d}\langle M, N \rangle_s| \leq (\mathbf{E} \int_0^\infty X_s^2 \, \mathrm{d}\langle M \rangle_s \cdot \mathbf{E} \int_0^\infty Y_s^2 \, \mathrm{d}\langle N \rangle_s)^{1/2}$.

Beweis. (ii) folgt aus (i), denn $|\langle M, N \rangle| \leq (\langle M \rangle_t \langle N \rangle_t)^{1/2}$.

(i) Im wesentlichen wie Teil (ii) aus Satz 4.2.4:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}((X \bullet M)_t (Y \bullet N)_t - (X \bullet M)_s (Y \bullet N)_s | \mathcal{F}_s) \\
= \; &\mathbf{E}([(X \bullet M)_t - (X \bullet M)_s] \cdot [(Y \bullet N)_t - (Y \bullet N)_s] | \mathcal{F}_s) \\
= \; &\mathbf{E}\left(\sum_{i=k}^n X_{t_i} Y_{t_i} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_s \right) \\
= \; &\mathbf{E}\left(\int_s^t X_r Y_r \, \mathrm{d}\langle M, N \rangle_r \middle| \mathcal{F}_s \right).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (X \bullet M)_t (Y \bullet N)_t - \int_0^t X_r Y_r \, \mathrm{d}\langle M, N \rangle_r$ ist Martingal

$\Rightarrow$ Beh.

(ii) Wir verwenden $|\langle A, B \rangle_\infty| \leq (\langle A \rangle_\infty \cdot \langle B \rangle_\infty)^{1/2}$ für $A, B \in H^2$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow |\mathbf{E}\langle X \bullet M, Y \bullet N \rangle_\infty| \\
\leq \; &\mathbf{E}((\langle X \bullet M \rangle_\infty \cdot \langle Y \bullet N \rangle_\infty)^{1/2}) \\
\leq \; &(\mathbf{E}\langle X \bullet M \rangle_\infty \cdot \mathbf{E}\langle Y \bullet N \rangle_\infty)^{1/2} \\
= \; &[\mathbf{E}((X^2 \bullet \langle M \rangle)_\infty) \cdot \mathbf{E}((Y^2 \bullet \langle N \rangle)_\infty)]^{1/2}.
\end{aligned}$$

□

4.3 Das Itô-Integral für vorhersagbare, messbare Prozesse

Definition 4.3.1. *Die auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ definierte σ-Algebra $\mathcal{P} = \sigma(\mathcal{E})$ heißt* vorhersagbare σ-Algebra *(„predictable σ-field"´). Sie ist die kleinste σ-Algebra auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, bezüglich der die Abbildungen $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ messbar sind für alle $X \in \mathcal{E}$.*
Ein $\mathcal{P}$-messbarer Prozess X heißt vorhersagbar.

Proposition 4.3.2.

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{E}) &= \sigma(\{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R} \text{ adaptiert, } X. \text{ linksstetig auf }]0,\infty[\}) \\ &= \sigma(\{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R} \text{ adaptiert, } X. \text{ stetig auf } [0,\infty[\}). \end{aligned}$$

Beweis. Seien $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ obige σ-Algebren. Offenbar $\sigma_3 \subset \sigma_2$. Ferner $\sigma_2 \subset \sigma_1$, da für linksstetiges X:

$$X_t(\omega) \leftarrow X_t^n(\omega) = X_0(\omega) \cdot \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} X_{k/n}(\omega) \cdot \mathbb{1}_{]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}(t).$$

Schließlich $\sigma_1 \subset \sigma_3$, denn $\exists f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ mit $|f_n| \leq \mathbb{1}_{]0,1+1/n]}$ und $f_n \to \mathbb{1}_{]0,1]}$ und $\exists g_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ mit $|g_n| \leq \mathbb{1}_{[0,1/n]}$ und $g_n \to \mathbb{1}_{\{0\}}$ und daher

$$\begin{aligned} X_t &= Z_{-1} \cdot \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} Z_i \cdot \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t) \\ &\uparrow \\ X_t^n &= Z_{-1} \cdot g_n(t) + \sum_{i=0}^{\infty} Z_i \cdot f_n\left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right). \end{aligned}$$

□

Korollar 4.3.3. *Jeder vorhersagbare Prozess ist progressiv messbar. Mit anderen Worten:*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\subset \mathit{Prog} := \sigma(\{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R} \text{ progressiv messbar}\}) \\ &\subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}_\infty. \end{aligned}$$

Sei nun wieder $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0})$ mit den üblichen Bedingungen und $M \in H^2$ (d.h. M ist stetiges Martingal mit $\|M\|_{H^2}^2 = \sup_t \mathbf{E}(M_t^2) < \infty$.)
Wir definieren ein endliches Maß $\mathbf{P}_M$ („Doléans-Maß"´) auf $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}_\infty)$ durch

$$\mathbf{P}_M(\Gamma) := \mathbf{E} \int_0^\infty \mathbb{1}_\Gamma(t, \omega) \, \mathrm{d}\langle M \rangle_t(\omega) \quad (\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}_\infty).$$

Ferner sei
$\mathcal{L}^2(M) = \{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R} \text{ vorhersagbar, } \|X\|_M < \infty\}$

und
$\mathcal{L}^2_*(M) = \{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ progressiv messbar, $\|X\|_M < \infty\}$
sowie eine Pseudo-Norm

$$\|X\|_M = [\mathbf{E}(\int_0^\infty X_t^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_t)]^{1/2} = [\int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} X^2 \, \mathrm{d}\mathbf{P}_M]^{1/2}$$

auf dem Raum der progressiv messbaren Prozesse $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$. Schließlich seien $L^2(M)$ und $L^2_*(M)$ die Räume der Äquivalenzklassen von $\mathcal{L}^2(M)$ bzw. $\mathcal{L}^2_*(M)$ bzgl. $\|\cdot\|_M$.

Proposition 4.3.4. (i) *$\mathcal{E}$ liegt dicht in $\mathcal{L}^2(M)$.*

(ii) *$L^2(M)$ und $L^2_*(M)$ sind Hilbert-Räume*

(iii) *und als solche isomorph bzw. stimmen im folgenden Sinne überein:*
Zu jedem Prozess $X \in \mathcal{L}^2_*(M)$ existiert ein vorhersagbarer Prozess Z mit $\|X - Z\|_M = 0$.

(iv) *Falls $t \mapsto \langle M\rangle_t$ absolut stetig f.s., so ist ferner $L^2(M) = L^2_{**}(M)$ mit*

$$\mathcal{L}^2_{**}(M) = \{X \ : \ \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}_\infty\text{-messbar, adaptiert, } \|X\|_M < \infty\}.$$

(v) *Offenbar $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}^2(M) \subset \mathcal{L}^2_*(M) \subset \mathcal{L}^2_{**}(M) \subset \mathcal{L}^2_{***}(M)$ mit*

$$\mathcal{L}^2_{***}(M) = \{X \ : \ \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}_\infty\text{-messbar, nicht notwendig adaptiert, } \|X\|_M < \infty\}.$$

Beweis. (ii) $L^2_*(M) = L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, Prog, \mathbf{P}_M)$ und
$L^2(M) = L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mathbf{P}_M) \Rightarrow$ Hilbert-Räume.

(i) Jeder Prozess $X \in \mathcal{L}^2(M)$ wird in $\|\cdot\|_M$ approximiert durch $\mathcal{P}$-einfache Prozesse $Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \quad (n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{P})$.
Jeder $\mathcal{P}$-einfache Prozess Y wird in $\|\cdot\|_M$ approximiert durch einfache Prozesse Z (Monotone Klassen-Argument), denn $\forall A \in \mathcal{P}, \forall \varepsilon > 0 :$

$$\begin{aligned} \exists A' \in \text{ ring}(\mathcal{E}) &= \text{ring }(\{]s,t] \times F : s < t, F \in \mathscr{F}_s\} \cup \{\{0\} \times F : F \in \mathscr{F}_0\}) \\ &= \{\text{endliche disjunkte Vereinigungen von solchen Mengen}\}, \end{aligned}$$

so dass $\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A'}\|_M < \varepsilon$.

(iii) Ohne Beweis (vorläufig).

□

Satz 4.3.5. *$\forall X \in L^2(M) : \exists!(X \bullet M) \in H^2$ mit der Eigenschaft: ist $X^n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$, mit $\|X - X^n\|_M \to 0$, so gilt $\|(X \bullet M) - |X^n \bullet M\|_{H^2} \to 0$, und daher $X^n \cdot M \to (X \bullet M)$ (gleichmäßig in t) in L^2. Bez: $I = X \bullet M$.*

Die Abbildung $L^2(M) \to H^2_0$, $X \mapsto X \bullet M$, ist eine Isometrie, d.h. $\|X\|_M = \|X \bullet M\|_{H^2}$.

Beweis. Definition von $X \bullet M$: zu $X \in L^2(M)$ existieren $X^n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|X - X^n\|_M \to 0$. Folglich

$$\|X^n \bullet M - X^k \bullet M\|_{H^2} = \|X^n - X^k\|_M \to 0 \text{ für } n, k \to \infty.$$

(Isometrie für $X^n, X^k \in \mathcal{E}$).
Also ist $\{X^n \bullet M\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in H^2
$\Rightarrow \exists! X \bullet M \in H_0^2 : X^n \bullet M \to X \bullet M$ in H^2. Dabei ist $X \bullet M$ unabhängig von der Wahl der Folge $\{X^n\}_n$, denn (wegen Isometrie):

$$\|X^n \bullet M - \widetilde{X}^n \bullet M\|_{H^2} = \|X^n - \widetilde{X}^n\|_M \to 0.$$

Schließlich

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\sup_t [(X^n \bullet M)_t - (X \bullet M)_t]^2) &\leq 4 \cdot \sup_t \mathbf{E}([(X^n \bullet M)_t - (X \bullet M)_t]^2) \\ &= 4 \cdot \|X^n - X\|_M \to 0. \end{aligned}$$

□

Korollar 4.3.6 (Kunita-Watanabe-Identität und -Ungleichung)**.** $\forall M, N \in H^2, X \in L^2(M), Y \in L^2(N)$:

(i) $\langle X \bullet M \rangle = \int\limits_0 X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M \rangle_s = X^2 \bullet \langle M \rangle$.

(ii) $\langle X \bullet M, Y \bullet N \rangle = \int\limits_0 X_s Y_s \,\mathrm{d}\langle M, N \rangle_s = (XY) \bullet \langle M, N \rangle$.

(iii) $|\mathbf{E}\langle X \bullet M, Y \bullet N \rangle_t| \leq \mathbf{E} \int\limits_0^t |X_s Y_s| |\,\mathrm{d}\langle M, N \rangle|_s \leq (\mathbf{E} \int\limits_0^t X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M \rangle_s \cdot \mathbf{E} \int\limits_0^t Y_s^2 \,\mathrm{d}\langle N \rangle_s)^{1/2}$.

Beweis. Folgt durch $L^2(M)$-Approximation von X durch $X^n \in \mathcal{E}$:

(i) $\forall M, N \in H^2$ (bzw. sogar $\in \mathcal{M}_{\text{loc}}$), $\forall X \in L^2(M), Y \in L^2(N)$ (bzw. ≥ 0, oder beschränkt, $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}_\infty$-messbar):

$$\begin{aligned} \sup_{t<\cdot} \int_0^{\cdot} X_s Y_s \,\mathrm{d}\langle M, N \rangle_s &\leq (\int_0^T X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M \rangle_s)^{1/2} (\int_0^T Y_s^2 \,\mathrm{d}\langle N \rangle_s)^{1/2} \\ &\leq \int_0^\infty |X_s Y_s| |\,\mathrm{d}\langle M, N \rangle_s| \end{aligned}$$

Wegen Dichtheit und Monotonie Argument:
X, Y beschränkt, ≥ 0,
$X = X_0 \cdot \mathbb{1}_{\{0\}} + X_{t_1} \cdot \mathbb{1}_{]0,t_1]} + \cdots + X_{t_n} \cdot \mathbb{1}_{]t_{n-1},t_n]}$, $\quad \mathscr{F}_\infty$-messbar, beschränkt, $\geq$

$0, \quad 0 = t_0 < t_1 \leq \dots \leq t_n = t$
$Y = \dots$

$\langle M, N\rangle_{s,t} := \langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s$
$\Downarrow$
$|\langle M,N\rangle_{s,t}| \leq \langle M\rangle_{s,t}^{1/2} \cdot \langle N\rangle_{s,t}^{1/2} \quad (\forall s,t) \quad f.s.$
$\Downarrow$

$$\begin{aligned}
\int_0^t X_s Y_s| \,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s| &\leq \sum_{i=1}^n X_{t_i} Y_{t_i} |\langle M,N\rangle_{t_{i-1},t_i}| \\
&\leq \sum X_{t_i} Y_{t_i} \langle M\rangle_{t_{i-1},t_i}^{1/2} \cdot \langle N\rangle_{t_{i-1},t_i}^{1/2} \\
&\leq \left(\sum X_{t_i} \langle M\rangle_{t_{i-1},t_i}\right)^{1/2} \cdot \left(\sum Y_{t_i} \langle N\rangle_{t_{i-1},t_i}\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^t Y_s \,\mathrm{d}\langle N\rangle_s\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_0^T X_s \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^T Y_s \,\mathrm{d}\langle N\rangle_s\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\sup_{t<T} \langle X \bullet M, Y \bullet N\rangle_t &\leq \mathbf{E}(\sup_{t<T} \langle X \bullet M\rangle_t^{1/2} \cdot \langle Y \bullet N\rangle_t^{1/2}) \\
&\leq \left[\mathbf{E}\sup_{t<T} \langle X \bullet M\rangle_t \cdot \mathbf{E}\sup_{t<T}\langle Y \bullet N\rangle_t\right]^{1/2} \\
&\overset{\text{(i)}}{=} \left[\mathbf{E}\int_0^T X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \cdot \mathbf{E}\int_0^T Y_s^2 \,\mathrm{d}\langle N\rangle_s\right]^{1/2} \qquad (\forall T \in [0,\infty])
\end{aligned}$$

und

$$\mathbf{E}\sup_{t<T} \int_0^t X_s Y_s \,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_t \leq \left[\mathbf{E}\int_0^T X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \cdot \mathbf{E}\int_0^T Y_s^2 \,\mathrm{d}\langle N\rangle_s\right]^{1/2}$$

(ii) Zunächst $Y \equiv 1 \in \mathcal{E}, X_n \in \mathcal{E}, X_n \to X$ in $L^2(M)$:
$\Rightarrow \langle X^n \bullet M, N\rangle_t \to \langle X \bullet M, N\rangle_t$ gleichmäßig integrierbar in L^1
$\Rightarrow$ Nach Übergang zu Teilfolge $\quad (\forall t)$ f.s.
Ferner:

$$\int_0^t X_s^n \,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s \to \int_0^t X_s \,\mathrm{d}\langle M,N\rangle \text{ glm. int. in } L^1$$

$\Rightarrow \langle X \cdot M, N\rangle_t = \int\limits_0^t X_s \,\mathrm{d}\langle M, N\rangle \quad (\forall t)$ f.s.

Schließlich

$$\begin{aligned}\langle Y \bullet N, X \bullet M\rangle_t &= \int\limits_0^t Y_s \,\mathrm{d}\langle N, X \bullet M\rangle_s \\ &= \int\limits_0^t Y_s X_s \,\mathrm{d}\langle N, M\rangle_s\end{aligned}$$

□

Satz 4.3.7. $\forall M \in H^2, X \in L^2(M) : \exists! I \in H_0^2 :$

$$\langle I, N\rangle = X \bullet \langle M, N\rangle \quad (\forall N \in H^2).$$

Nämlich: $I = X \bullet M$.

Beweis. Existenz: obiges Korollar mit $Y \equiv 1$.
Eindeutigkeit: Seien $I, I' \in H_0^2$ mit $\langle I, N\rangle = \langle I', N\rangle \quad (\forall N \in H^2)$
$\Rightarrow \langle I - I'\rangle = 0 \Rightarrow I = I'$. □

Bemerkung zur alternativen Definition: $\forall M, N \in H_0^2, \forall X \in L^2_{***}(M)$:

$$\begin{array}{rcl} |\mathbf{E}[(X \bullet \langle M, N\rangle_\infty)]| &=& |\mathbf{E}[\int\limits_0^\infty X_s \,\mathrm{d}\langle M, N\rangle_s]| \\ &\leq& (\mathbf{E}\int\limits_0^\infty X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \cdot \mathbf{E}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\langle N\rangle_s)^{1/2} \\ &=& \|X\|_M \cdot \|N\|_{H^2} \\ & \Downarrow & \\ N &\mapsto& \mathbf{E}[(X \bullet \langle M, N\rangle_\infty)] \quad \text{stetige Linearform} \\ H_0^2 &\to& \mathbb{R} \\ & \Downarrow & \\ \exists! \quad I &\in& H_0^2 : \mathbf{E}[I_\infty N_\infty] = \mathbf{E}[(X \bullet \langle M, N\rangle)_\infty] \\ &=:& X \bullet M \end{array} \tag{4.2}$$

Für $M \in H^2 : X \bullet M := X \bullet (M - M_0)$.
Aus (4.2) folgt:
$\mathbf{E}(\langle I, N\rangle_\infty) = \mathbf{E}((X \bullet \langle M, N\rangle)_\infty) \quad (\forall N \in H_0^2)$
$\Rightarrow$ (ersetze N durch N^T):
$\mathbf{E}(\langle I, N\rangle_T) = \mathbf{E}((X \bullet \langle M, N\rangle)_T) \quad \forall$ Stoppzeiten $T, \forall N \in H_0^2$
$\Rightarrow \langle I, N\rangle - (X \bullet \langle M, N\rangle)$ ist Martingal $(\Rightarrow = 0)$

$$\Rightarrow \langle I, N\rangle = X \bullet \langle M, N\rangle \quad (\forall N \in H_0^2) \tag{4.3}$$

Bemerkungen 4.3.8. (i) Die Assoziativität für Stieltjes-Integrale ist offensichtlich:

$$(f \bullet (g \bullet h))_t = \int\limits_0^t f_s \, \mathrm{d}(g \bullet h)_s = \int\limits_0^t f_s g_s \, \mathrm{d}h_s = ((fg) \bullet h)_t$$

(denn $\mathrm{d}(g \bullet h)_s = g_s \, \mathrm{d}h_s$).

(ii) Die Assoziativität für Itô-Integrale kann man in symbolischer Kurzschreibweise wie folgt formulieren:

$$\mathrm{d}(X \bullet M)_t = X_t \, \mathrm{d}M_t$$
$$\Downarrow$$
$$\mathrm{d}(Y \bullet (X \bullet M))_t = Y_t \, \mathrm{d}(X \bullet M)_t = Y_t X_t \, \mathrm{d}M_t$$

(iii) Durch (4.2) wird $X \bullet M$ definiert $\forall X \in L^2_{***}(M)$. Sei $\widetilde{X}$ die Projektion von X auf $L^2(M)$. Dann gilt $X \bullet M = \widetilde{X} \bullet M$.

Bemerkung 4.3.9. Alternative Definition von $X \bullet M$, sogar für $X \in L_{***}(M) = \{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R} \mid X \ \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}_\infty\text{-messbar}, \|X\|_M < \infty\}$.
Aber Achtung! Hier ist stochastisches Integral $\neq$ Stieltjes-Integral.

Beispiel 4.3.10. $X_t(\omega) = Z(\omega) \quad \forall t \geq 0, Z \in \mathscr{F}_\infty \setminus \mathcal{F}_0$
$\Rightarrow$ Stieltjes-Integral $\int\limits_0^t X_s \, \mathrm{d}M_s = Z(M_t - M_0)$ nicht adaptiert.
Aber: Stochastisches Integral adaptiert ($=$ Stieltjes-Integral $\int \widetilde{X} \, \mathrm{d}M$ mit $\widetilde{X}_? = Z_?$).

Beispiel 4.3.11. (siehe Beispiel 4.3.10)
$X_t(\omega) = Z(\omega)$,
$\Rightarrow \widetilde{X}_t(\omega) = Z_{t-}(\omega)$ mit Z_t Càdlàg-Version von $\mathbf{E}(Z|\mathscr{F}_t)$
$\widetilde{X}_t$ vorhersagbar, Z_t progressiv messbar.
$\Rightarrow (X \bullet M)_t = \int\limits_0^t Z \, \mathrm{d}M_s := \int\limits_0^t \mathbf{E}(Z|\mathcal{F}_s) \, \mathrm{d}M_s \quad \neq$ Stieltjes-Integral

Proposition 4.3.12. *$X \in L^2(M)$ und $Y \in L^2(X \bullet M) \Rightarrow YX \in L^2(M)$ und $(YX) \bullet M = Y \bullet (X \bullet M)$.*

Korollar 4.3.13. *In obiger Situation:* $\mathrm{d}\mathbf{P}_{X \bullet M} = X^2 \, \mathrm{d}\mathbf{P}_M$.

<u>Beh.</u> Wegen $\langle X \bullet M \rangle = X^2 \bullet \langle M \rangle$ und $Y \in L^2(X \bullet M)$, d.h. $\mathbf{E}(Y^2 \bullet \langle X \bullet M \rangle)_\infty < \infty$, gilt $\mathbf{E}((YX)^2 \bullet \langle M \rangle)_\infty < \infty$, d.h. $YX \in L^2(M)$.
Ferner gilt $\forall N \in H^2$:

$$\begin{aligned} \langle (YX) \bullet M, N \rangle &= (YX) \bullet \langle M, N \rangle \\ &= Y \bullet (X \bullet \langle M, N \rangle) \quad \text{Assoziativität von Lebesgue-Stieltjes} \\ &= Y \bullet \langle X \bullet M, N \rangle \quad \text{vorheriger Satz} \\ &= \langle Y \bullet (X \bullet M), N \rangle \quad \text{vorheriger Satz} \end{aligned}$$

Wegen Eindeutigkeit: $(YX) \bullet M = Y \bullet (X \bullet M)$.

Proposition 4.3.14. *$\forall X \in L^2(M), \forall$ Stoppzeiten T:*

$$(X \bullet M)^T = X \bullet M^T = (X\mathbb{1}_{[0,T]}) \bullet M$$

Beweis. Folgt aus voriger Proposition wegen

$$M^T = \mathbb{1}_{[0,T]} \bullet M.$$

□

4.4 Erweiterung durch Lokalisation

Sei nun $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ stetiges lokales Martingal.

Definition 4.4.1. $\mathcal{L}^2_{loc}(M) = \{X$ *messbar, vorhersagbar mit* $\forall t \geq 0 : \int_0^t X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s < \infty \quad \mathbf{P}$-*f.s.*$\}$
und entsprechend $L^2_{loc}(M)$.

Lemma 4.4.2. $X \in \mathcal{L}^2_{loc}(M) \iff X$ *vorhersagbar und* $\exists$ *Stoppzeiten* $T_n \nearrow \infty$:

$$\mathbf{E}\left(\int_0^{T_n} X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right) < \infty$$

(d.h. $X\mathbb{1}_{[0,T_n]} \in \mathcal{L}^2(M)$ *bzw.* $X \in \mathcal{L}^2(M^{T_n})$*).*

Beweis. „⇒“ Wähle $T_n = \inf\left\{t \geq 0 : \int_0^t X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s > n\right\} \nearrow \infty$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{T_n} X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s &\leq n \\ \Rightarrow \mathbf{E}\left(\int_0^{T_n} X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right) &\leq n. \end{aligned}$$

„⇐“ $\mathbf{E}\left(\int_0^{T_n} X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right) < \infty$
$\Rightarrow \mathbf{P}\left(\int_0^{t\wedge T_n} X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s < \infty\right) = 1 \quad (\forall t, n)$ und $\mathbf{P}(T_n > t) \to 1 \quad (n \to \infty)$
$\Rightarrow \mathbf{P}\left(\int_0^t X_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s < \infty\right) = 1.$ □

Definition 4.4.3. *Für $M \in \mathcal{M}_{loc}$ und $X \in L^2_{loc}(M)$:*

$$X \bullet M := \lim_{n\to\infty} X \bullet M^{T_n} = \textit{ stochastisches Integral}$$

Für $V = M + A \in \mathcal{S}$ und $X \in \mathcal{B}$:

$$X \bullet V = X \bullet M + X \bullet A \quad \in \mathcal{S}.$$

Bemerkung 4.4.4. Der Limes in Definition 4.4.3 exitsiert, denn $\forall k > n$ gilt:

$$\begin{aligned} X \bullet M^{T_k} &= (X \bullet M^{T_k})^{T_n} \\ &= X \bullet M^{T_n} \end{aligned}$$

auf $t < T_n$

Proposition 4.4.5. *$\forall V, W \in \mathcal{S}$, $\forall X, Y \in \mathcal{B}$:*

(i) *$X \bullet V$ bilinear in X, V.*

(ii) *$X \bullet V \in \mathcal{M}_{0,loc}$, falls $V \in \mathcal{M}_{loc}$*
$X \bullet V \in \mathcal{A}_0$, falls $V \in \mathcal{A}$.

(iii) *$(XY) \bullet V = X \bullet (Y \bullet V)$.*

(iv) *$\langle X \bullet V, Y \bullet W\rangle = XY \bullet \langle V, W\rangle$*
($= 0$, falls V oder $W \in \mathcal{A}$).

(v) *$(X \bullet V)^T = (X \mathbb{1}_{[0,T]}) \bullet V = X \bullet V^T \quad \forall$ Stoppzeiten T.*

(vi) *Für fast jedes $\omega \in \Omega, \forall a, b \in \mathbb{R}$:*
$X(\omega) = 0$ auf $[a, b]$ oder $V(\omega)$ konstant auf $[a, b]$
$\Rightarrow (X \bullet V)(\omega)$ konstant auf $[a, b]$.

Beweis von (vi)). Klar für $V \in \mathcal{A}$. Sei also $V \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$. Aus der Voraussetzung folgt: $X_0(\omega) = 0$ auf $[a, b]$ oder $\langle V\rangle(\omega)$ konstant auf $[a, b]$
$\Rightarrow (X^2 \bullet \langle V\rangle) = \left(\int_0^{\cdot} X_s^2 \, \mathrm{d}\langle V\rangle_s\right)(\omega)$ konstant auf $[a, b]$
$\Rightarrow (X \bullet V)$ konstant auf $[a, b]$. □

Satz 4.4.6 (Stochastischer Integralkonvergenzsatz)**.** *Seien $V \in \mathcal{S}$ und $X^{(n)}$, $X \in \mathscr{B}, |X^{(n)}| \leq X$ $(\forall n)$ und $X^{(n)} \to 0$ punktweise (d.h. für jedes t) f.s.*
Dann $X^{(n)} \cdot V \to 0$ gleichmäßig $\mathbf{P}$-stochastisch auf jedem kompakten Intervall $\subset \mathbb{R}_+$.

Beweis. Zu zeigen: $\forall t, \forall \varepsilon$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t} \left|(X^{(n)} \bullet V)_s\right| \geq \varepsilon\right) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Für $V \in \mathcal{A}$ ist das der Satz von der majorisierten Konvergenz. Sei $V \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ und T Stoppzeit mit $V^T \in H^2, X^T$ beschränkt

$\Rightarrow (X^{(n)})^T \to 0$ in $L^2(V^T)$ (Satz von der majorisierten Konvergenz)
$\Rightarrow (X^{(n)} \bullet V)^T \to 0$ in H^2 (L^2-Isometrie)
$\Rightarrow (X^{(n)} \bullet V)^T \to 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}_+$ **P**-stochastisch
$\Rightarrow X^{(n)} \bullet V \to 0$ lokal gleichmäßig **P**-stochastisch. □

Satz 4.4.7 (Approximation durch Riemann-Summen)**.** *Sei* $V \in \mathcal{S}, X \in \mathcal{B}, t > 0$ *und* Δ^n *beliebige Folge von Partitionen von* $[0,t]$ *mit* $\|\Delta^n\| \to 0$*. Dann*

$$I_s^{\Delta_n}(X,V) := \sum_{t_i \in \Delta^n} X_{t_i}(V_{s\wedge t_{i+1}-V_{s\wedge t_i}}) \to \int_0^s X_r \, \mathrm{d}V_r$$

gleichmäßig in $s \in [0,t]$ **P***-stochastisch.*

Beweis. Sei o.B.d.A. $X_0 = 0$ und zunächst X beschränkt. Wegen Linksstetigkeit von $X \in \mathcal{B}$ ist X punktweise Limes von $X^{\Delta_n} = \sum X_{t_i} 1_{]t_i,t_{i+1}]}$ (auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$).
Ferner $I_s^{\Delta_n}(X,V) = \int_0^s X_r^{\Delta_n} \, \mathrm{d}V_r$.
Also gilt nach dem stochastischen Integralkonvergenzsatz 4.4.6:

$$I_s^{\Delta_n}(X,V) \to \int_0^s X_r \, \mathrm{d}V_r \text{ gleichmäßig auf } [0,t] \ \mathbf{P}\text{-stochastisch.}$$

Für allgemeines X existieren $T_n \nearrow \infty$ mit X^{T_n} beschränkt. □

Bemerkung 4.4.8. Stets $\exists$ Teilfolge $(n_k)_k$ mit

$$I_s^{\Delta_{n_k}}(X,V) \underset{(\text{für } k\to\infty)}{\to} \int_0^s X_r \, \mathrm{d}V_r \text{ gleichmäßig in } s \in [0,t] \ \mathbf{P} - \text{f.s.}$$

Satz 4.4.9 (Partielle Integrationsformel)**.** $\forall X, Y \in \mathcal{S}$:

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t.$$

Insbesondere

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s + \langle X \rangle_t.$$

Beweis. Allgemeiner Fall folgt durch Polarisation aus Spezialfall $X = Y$. Für jede Partition $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ von $[0,t]$ gilt (mit $0 = t_0 < \cdots < t_n = t$):

$$\sum_i \left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)^2 = X_{t_n}^2 - 2\sum_i X_{t_i}\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)$$

Für $\|\Delta\| \to 0$ gilt:

$$\langle X \rangle = X_t^2 - X_0^2 - 2\int\limits_0^t X_s \, \mathrm{d}X_s$$

(nach dem Approximationssatz für stochastische Integrale). $\square$

In differentieller Schreibweise lautet das:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(XY)_t &= X_t \, \mathrm{d}Y_t + Y_t \, \mathrm{d}X_t + \mathrm{d}\langle X, Y\rangle_t \\ \text{bzw.} &= X_t \, \mathrm{d}Y_t + Y_t \, \mathrm{d}X_t + \mathrm{d}X_t \, \mathrm{d}Y_t, \end{aligned}$$

falls man definiert: $\mathrm{d}X_t \, \mathrm{d}Y_t := \mathrm{d}\langle X, Y\rangle_t$.
Hierbei gilt $\mathrm{d}X_t \, \mathrm{d}X_t = \mathrm{d}\langle X\rangle_t$ und $\mathrm{d}X_t \, \mathrm{d}Y_t = 0$, falls X oder $Y \in \mathcal{A}$.
Folglich: $\forall X, Y, Z \in \mathcal{S}: \quad (\mathrm{d}X_t \, \mathrm{d}Y_t) \, \mathrm{d}Z_t = \mathrm{d}X_t(\mathrm{d}Y_t \, \mathrm{d}Z_t) = 0$, denn $\mathrm{d}X_t \, \mathrm{d}Y_t = \mathrm{d}\langle X, Y\rangle_t = 0$ wegen $\langle X, Y\rangle \in \mathcal{A}$.

Beispiel 4.4.10. $X = B =$ Brownsche Bewegung.

$$\Rightarrow \quad B_t^2 = B_0^2 + 2\int\limits_0^t B_s \, \mathrm{d}B_s + t$$

$$\text{bzw.} \quad \mathrm{d}B_t^2 = 2B_t \, \mathrm{d}B_t + \mathrm{d}t.$$

Hier gelten folgende fundamentalen Regeln:

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}B_t)^2 &= \mathrm{d}t \qquad („\mathrm{d}B_t = \sqrt{\mathrm{d}t}“) \\ \mathrm{d}B_t\mathrm{d}t &= \mathrm{d}t\mathrm{d}B_t = 0 \\ (\mathrm{d}t)^2 &= 0. \end{aligned}$$

4.5 Itô-Differentiale

Itô-Differentiale sind als Abbildungen $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2; a < b\} \to \mathbb{R}^\Omega$ zu interpretieren:

$$\mathrm{d}V_t : \qquad [a,b] \to \int\limits_a^b \mathrm{d}V_t = V_b - V_a$$

$$\begin{array}{ccc} X_t \, \mathrm{d}V_t : & [a,b] \to & \int\limits_a^b X_t \, \mathrm{d}V_t \\ \| & & \| \\ \mathrm{d}(X \bullet V)_t & & (X \bullet V)_b - (X \bullet V)_a \end{array}$$

Assoziativität: $\mathrm{d}(Y \bullet (X \bullet V)) = Y_t \, \mathrm{d}(X \bullet V)_t = Y_t X_t \, \mathrm{d}V_t$.
Definiere ferner: $\mathrm{d}V_t \, \mathrm{d}W_t := \mathrm{d}\langle V, W\rangle_t, \quad (\mathrm{d}V_t)^2 = \mathrm{d}V_t \, \mathrm{d}V_t = \mathrm{d}\langle V\rangle_t$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ \mathrm{d}(X \bullet V)_t \, \mathrm{d}(Y \bullet W)_t &= X_t Y_t \, \mathrm{d}V_t \, \mathrm{d}W_t \quad \text{(Kunita-Watanabe-Identität)} \\ (\mathrm{d}(X \bullet V)_t)^2 &= X_t^2(\mathrm{d}V_t)^2 \end{aligned}$$

Beispiel 4.5.1. $X_t = B_t^2$. Gesucht: $\langle X \rangle_t$.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\langle X \rangle_t &= (\mathrm{d}X_t)^2 = (\mathrm{d}B_t^2)^2 = (2B_t\ \mathrm{d}B_t + \mathrm{d}t)^2 \\ &= 4B_t^2(\mathrm{d}B_t)^2 + 4B_t\ \mathrm{d}B_t\ \mathrm{d}t + (\mathrm{d}t)^2 \\ &= 4B_t^2\ \mathrm{d}t \\ \Rightarrow \langle X \rangle_t &= 4\int\limits_0^t B_s^2\ \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Beispiel 4.5.2.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(XYZ)_t &= XY\ \mathrm{d}Z_t + ZX\ \mathrm{d}Y_t + YZ\ \mathrm{d}X_t \\ &+ X\ \mathrm{d}Y_t\ \mathrm{d}Z_t + Z\ \mathrm{d}X_t\ \mathrm{d}Y_t + Y\ \mathrm{d}Z_t\ \mathrm{d}X_t \\ &+ \ \mathrm{d}X_t\ \mathrm{d}Y_t\ \mathrm{d}Z_t + \ \mathrm{d}Z_t\ \mathrm{d}X_t\ \mathrm{d}Y_t + \ \mathrm{d}Y_t\ \mathrm{d}Z_t\ \mathrm{d}X_t \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}(f(X))_t = f'(X_t)\ \mathrm{d}X_t + \tfrac{1}{2}f''(X_t)(\mathrm{d}X_t)^2 + \tfrac{1}{3}f'''(X_t)\underbrace{(\mathrm{d}X_t)^3}_{=0} + \underbrace{\ldots}_{=0}$$

(Taylor-Formel $\rightsquigarrow$ Itô-Formel).

Bemerkung 4.5.3. Für $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}} : M^2 - M_0^2 - \langle M \rangle \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ (per Definition von $\langle M \rangle$).

Nach der partiellen Integrationsformel: $\quad = 2\int\limits_0^t M_s\ \mathrm{d}M_s$.

5 Itô-Formel und Anwendungen

5.1 Die Itô-Formel

Satz 5.1.1 (Itô-Formel)**.** *Sei $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und $X = (X^1, \dots, X^d)$ mit $X^1, \dots, X^d \in \mathcal{S}$. Dann ist $F(X) \in \mathcal{S}$ mit*

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s) \, \mathrm{d}X_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 F(X_s)}{\partial x_i \partial x_j} \, \mathrm{d}\langle X^i, X^j \rangle_s \end{aligned}$$

Beweis. (i) Gilt die Behauptung für ein $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, so gilt diese auch für G mit $G(x) = \sum\limits_{k=1}^{d} \alpha_k x_k F(x)$.

Denn nach partieller Integration gilt:

$$\begin{aligned} G(X_t) - G(X_0) &= \sum \alpha_k X_t^k F(X_t) - \sum \alpha_k X_0^k F(X_0) \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} \int_0^t \sum \alpha_k X_s^k \, \mathrm{d}F(X_s) + \int_0^t \sum \alpha_k F(X_s) \, \mathrm{d}X_s^k + \sum \alpha_k \langle X^k, F(X) \rangle_s \\ &= \int \sum_{k,i} \alpha_k X_s^k \frac{\partial^2 F(X_s)}{\partial x_i} \, \mathrm{d}X_s^i + \int \frac{1}{2} \sum_{k,i,j} \alpha_k X_s^k \frac{\partial^2 F(X_s)}{\partial x_i \partial x_j} \, \mathrm{d}\langle X^i, X^j \rangle_s \\ &+ \int \sum_k \alpha_k F(X_s) \, \mathrm{d}X_s^k + \int \sum_{k,i} \alpha_k \frac{\partial F}{\partial x_i} \, \mathrm{d}\langle X^k, X^i \rangle_s \\ &= \int \sum_i \frac{\partial G(X_s)}{\partial x_i} \, \mathrm{d}X_s^i + \int \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 G(X_s)}{\partial x_i \partial x_j} \, \mathrm{d}\langle X^i, X^j \rangle_s \end{aligned}$$

denn

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = \sum \alpha_k x_k \frac{\partial F}{\partial x_i} + \alpha_i F,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} = \sum \alpha_k x_k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} + \alpha_j \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i} + \alpha_i \frac{\partial F}{\partial x_j}.$$

(ii) Die Behauptung gilt also für alle Polynome auf $\mathbb{R}^d$ (vollständige Induktion).

(iii) Die Behauptung gilt $\forall F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ mit kompaktem Träger.
Denn: $\exists$ Polynome F_n mit $F_n \to F$ punktweise.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} F_n &\to \frac{\partial}{\partial x_i} F \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F_n &\to \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F \end{aligned}$$

(z.B. Taylor-Entwicklung von F, Weierstrass'scher Approximationssatz)
Damit folgt die Behauptung mit Konvergenzsätzen für gewöhnliche und stochastische Integrale.

(iv) Die Behauptung gilt $\forall F \in \mathcal{C}^2$.
Denn: Wähle K_n kompakt, $K_n \nearrow \mathbb{R}^d$ und

$$T_n := \inf\{t > 0 : X_t \notin K_n\} \Rightarrow T_n \nearrow \infty.$$

Wähle F_n mit $F_n = F$ auf K_n, also hat F_n kompakten Träger
$\Rightarrow F_n(X_t) = F_n(X_0) + \dots$
$\Rightarrow F(X_t) = F(X_0) + \dots$ auf $\{t < T_n\}$
$\Rightarrow F(X_t) = F(X_0) + \dots$ auf Ω.

$\square$

Bemerkungen 5.1.2. (i) Für $X = (M^1, \dots, M^k, A^1, \dots, A^l), M^i \in \mathcal{M}^{\text{loc}}, A^j \in \mathcal{A}$ und $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{k+l}, \mathbb{R})$ gilt:

$$\mathrm{d}F(X_t) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_t)\ \mathrm{d}M_t^i + \sum_{j=1}^l \frac{\partial F}{\partial x_{k+j}}(X_t)\ \mathrm{d}A_t^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\ \mathrm{d}\langle M^i, M^j \rangle_t.$$

(ii) Für $X = X_0 + M + A, M \in \mathcal{M}_0^{\text{loc}}, A \in \mathcal{A}_0$ und $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist $F(X) = F(X_0) + N + B \in \mathcal{S}$ mit

$$N_t = \int_0^t F'(X_s)\ \mathrm{d}M_s \in M_0^{\text{loc}}$$

$$B_t = \int_0^t F'(X_s)\ \mathrm{d}A_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s)\ \mathrm{d}\langle M \rangle_s \in \mathcal{A}_0.$$

Itô-Formel in Differentialform:

$d = 1:$

$$\mathrm{d}F(X_t) = F'(X_t)\ \mathrm{d}X_t + \frac{1}{2} F''(X_t)(\mathrm{d}X_t)^2$$

allgemein:

$$\mathrm{d}F(X_t) = \sum \partial_i F(X_t)\ \mathrm{d}X_t^i + \frac{1}{2} \sum \partial_{ij} F(X_t)\ \mathrm{d}X_t^i\ \mathrm{d}X_t^j$$

$d = 1$ **und** $X = BB$:

$$\mathrm{d}F(B_t) = F'(B_t)\ \mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}F''(X_t)\ \mathrm{d}t.$$

Korollar 5.1.3. *Sei $X \in \mathcal{C}^d, F \in \mathcal{C}^2$. Dann gilt:*

$$\langle F(X)\rangle_t = \sum_{i,j} \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_j}\right)(X_s)\ \mathrm{d}\langle X^i, X^j\rangle_s$$

$(\mathrm{d}F(X_t))^2 = (\ldots\ \mathrm{d}X_t^i + \ldots\ \mathrm{d}X_t^i\ \mathrm{d}X_t^j)^2 = \ldots$

Korollar 5.1.4. *Sei B eine d-dimensionale BB, $F \in \mathcal{C}^2$. Dann gilt:*

(i) $\langle F(B)\rangle_t = \int_0^t |\nabla F|^2(B_s)\ \mathrm{d}s.$

(ii) $\mathbf{E}_m(\langle F(B)\rangle_t) = t \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla F|^2(x)dx =: t \cdot \mathcal{E}(F) = t\|\nabla F\|_2^2.$

Beweis. (i) $\langle B^i, B^j\rangle_t = \delta_{ij} \cdot t$, denn B^i und B^j sind unabhängig ($\forall i \neq j$).

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(B_t^i B_t^j - B_s^i B_s^j|\mathscr{F}_s) &= \mathbf{E}(B_t^i(B_t^j - B_s^j)|\mathscr{F}_s) + \mathbf{E}((B_t^i - B_s^i)B_s^j|\mathscr{F}_s) \\
&= \mathbf{E}(B_t^i|\mathscr{F}_s) \cdot \mathbf{E}(B_t^j - B_s^j|\mathscr{F}_s) + \ldots \\
&= 0 + 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow B^i B^j - B_0^i B_0^j$ Martingale
$\Rightarrow \langle B^i, B^j\rangle = 0.$

(ii)

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{E}_x\left(\int_0^t |\nabla F|^2(B_s)\ \mathrm{d}s\right)\ \mathrm{d}x &= \int_0^t \int \mathbf{E}_x\left(|\nabla F|^2(X_s)\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int \int |\nabla F|^2(y) p_s(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

□

Wiederholung: Itô-Formel für d-dimensionale BB:

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t \nabla f(B_s)\ \mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)\ \mathrm{d}s$$

und

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t \nabla f(s, B_s)\ \mathrm{d}B_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)\ \mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(s, B_s)\ \mathrm{d}s.$$

Bemerkung 5.1.5.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_*^{\mathrm{loc}} &= \left\{X \text{ adaptiert }, X - X_0 \in M_0^{\mathrm{loc}}\right\} \supset \mathcal{M}^{\mathrm{loc}} \\ &= \{X_0 \text{ ist } \mathcal{F}_0\text{-messbar}\} \oplus \mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}}.\end{aligned}$$

Proposition 5.1.6. (i) *Sei B d-dimensionale BB, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ und*

$$Af = \frac{1}{2}\Delta f + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Dann ist

$$M_t = f(t, B_t) - f(0, B_0) - \int_0^t Af(s, B_s)\, \mathrm{d}s \in \mathcal{M}_*^{loc}$$

Insbesondere: $(f(t, B_t))_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_*^{loc}$, falls $Af = 0$ auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$.

(ii) *Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$, dann gilt:*

$$M_t = f(B_t) - f(B_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)\, \mathrm{d}s \in \mathcal{M}_*^{loc}. \tag{5.1}$$

Insbesondere $f(B) - f(B_0) \in \mathcal{M}_*^{loc}$, falls f harmonisch auf $\mathbb{R}^d$.

(iii) *$f(B^T) - f(B_0) \in \mathcal{M}_*^{loc}$, falls f harmonisch auf $D \subset \mathbb{R}^d$ mit $T = \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}$.*

Beweis. (i) und (ii): Itô-Formel und $\langle B^i, B^j\rangle_t = \delta_{ij} \cdot t$.

(iii) Stoppen von (5.1) bei T. Wichtig: $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ oder zumindest $f \in \mathcal{C}^2(D^i)$ mit $D^i \supset \overline{D}$.

□

Bemerkung 5.1.7. Bei (i) gilt: $\langle M\rangle_t = \int_0^t |\nabla f(s, B_s)|^2\, \mathrm{d}s$.

Proposition 5.1.8. *Sei B eine d-dimensionale BB, $\sigma(x) = (\sigma_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,d}$ eine Matrix mit stetigen Koeffizienten $x \mapsto \sigma_{ij}(x)$ und X ein stetiger, adaptierter d-dimensionaler Prozess mit*

$$X_t^i = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_{ij}(X_s)\, \mathrm{d}B_s^j + X_0^i. \tag{5.2}$$

Dann ist X^i ein lokales Martingal und außerdem ist $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$

$$M_t^f = f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t Af(s, X_s)\, \mathrm{d}s$$

ein lokales Martingal, wobei

$$Af(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{5.3}$$

mit $a_{ij}(x) = (\sigma(x)\sigma^T(x))_{ij} = \sum_{k=1}^{d} \sigma_{ik}(x) \cdot \sigma_{jk}(x)$.

Beweis. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\langle X^i, X^j\rangle_t &= \sum_{k,l} \langle \sigma_{ik}(x)\cdot B^k, \sigma_{jl}(x)\cdot B^l\rangle_t \\
&= \sum_{k,l} \int_0^t \Big(\sigma_{ik}(X_s)\sigma_{jl}(X_s)\ \mathrm{d}\langle B^k, B^l\rangle_s\Big) \\
&= \sum_{k} \int_0^t \sigma_{ik}(X_s)\sigma_{jk}(X_s)\ \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t a_{ij}(X_s)\ \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned}
f(t,X_t) &= f(0,X_0) + \int_0^t \nabla f(s,X_s)\ \mathrm{d}X_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)\ \mathrm{d}s + \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s,X_s)\ \mathrm{d}\langle X^i, X^j\rangle_s \\
&= f(0,X_0) + \text{ lokales Martingal } + \int_0^t Af(s,X_s)\ \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

□

Anwendungen:

Satz 5.1.9 (L^2-Liouville-Theorem)**.** *Sei* $f \in L^2$ *harmonisch auf* $\mathbb{R}^d \Rightarrow f \equiv 0$.

Beweis. f harmonisch $\Rightarrow f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t \nabla f(X_s)\ \mathrm{d}X_s$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_m\left[(f(X_t)-f(X_0))^2\right] &= \mathbf{E}_m\left[(\int_0^t \nabla f(X_s)\ \mathrm{d}X_s)^2\right] \\ &= \mathbf{E}_m\left[\int_0^t |\nabla f|^2(X_s)\ \mathrm{d}s\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_m\left[(f(X_t)-f(X_0))^2\right] &\leq 2\mathbf{E}_m\left[f^2(X_t)+f^2(X_0)\right] \\ &= 2\int\int\left[f^2(y)+f^2(x)\right]p_t(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned}\infty > 4\cdot\|f\|^2 &= 2\mathbf{E}_m\left[f^2(X_t)+f^2(X_0)\right] \\ &\geq \cdots \geq \mathbf{E}_m\left[\int_0^t |\nabla f|^2(X_s)\ \mathrm{d}s\right] \\ &= t\cdot\|\nabla f\|_2^2 \quad (\forall t>0)\end{aligned}$$

Also ist $\|\nabla f\| = 0$ und damit f konstant, also $f \equiv 0$. □

5.2 Exponentielle Martingale

Proposition 5.2.1. *Sei $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{(\partial x)^2} = 0$ und $M \in \mathcal{M}^*_{loc}$. Dann ist $N_t := F(\langle M\rangle_t, M_t) \in \mathcal{M}^*_{loc}$.*

Beweis. $\mathrm{d}N_t = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\ \mathrm{d}M_t + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\ \mathrm{d}\langle M\rangle_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\ \mathrm{d}\langle M\rangle_t}_{=0 \text{ nach Vor.}}$. □

Korollar 5.2.2. *$\forall\lambda\in\mathbb{C}, \forall M\in\mathcal{M}^*_{loc}$ ist $\mathcal{E}_\lambda(M)\in\mathcal{M}^*_{loc}+i\mathcal{M}^*_{loc}$ mit $\mathcal{E}_\lambda(M)_t = \exp(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_t)$. $\mathcal{E}_\lambda(M)$ heißt „exponentielles lokales Martingal“.*
(Hierbei bedeutet $\mathcal{E}_\lambda(M)\in\mathcal{M}^*_{loc}+i\mathcal{M}^*_{loc}$: Re $\mathcal{E}_\lambda(M)\in\mathcal{M}^*_{loc}$ und Im $\mathcal{E}_\lambda(M)\in\mathcal{M}^*_{loc}$.)

Beweis. $F(t,x) = \exp(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}t)$ löst $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)F = 0$. □

Beispiel 5.2.3. Für $\lambda = i = \sqrt{-1}$ gilt: $\forall M\in\mathcal{M}^*_{\mathrm{loc}}$ ist
$\cos(M_t)\cdot e^{\frac{1}{2}\langle M\rangle_t}\in\mathcal{M}^*_{\mathrm{loc}}$ und $\sin(M_t)\cdot e^{\frac{1}{2}\langle M\rangle_t}\in\mathcal{M}^*_{\mathrm{loc}}$.

Frage:
Ist $\mathcal{E}_\lambda(M)$ ein richtiges Martingal, also nicht nur lolales Martingal?

Antwort:
Im Allgemeinen: NEIN!

Proposition 5.2.4. *Es gilt $\mathcal{E}_\lambda(M) \in \mathcal{M} + i\mathcal{M}$ unter jeder der folgenden Voraussetzungen:*

(i) *M beschränkt, $\lambda \in \mathbb{R}$*

(ii) *$\lambda \in i\mathbb{R}, \langle M \rangle$ beschränkt.*

(iii) *$M_0 = 0$ und $\mathbf{E}\left[\mathcal{E}_\lambda(M)_t\right] = 1 \qquad (\forall t)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$*

Beweis. (i) M beschränkt und $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{E}_\lambda(M) = \exp(\lambda M_t) \cdot \underbrace{\exp(-\frac{\lambda^2}{2}\langle M \rangle_t)}_{\leq 1}$ ist beschränkt und ein lokales Martingal
$\Rightarrow \mathcal{E}_\lambda(M)$ ist ein Martingal (gleichgradig integrierbar).

(ii) analog.

(iii) $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{E}_\lambda(M) \in \mathbb{R}_+$ und lokales Martingal $\Rightarrow \mathcal{E}_\lambda(M)$ ist Supermartingal $\Rightarrow$ ($\mathcal{E}_\lambda(M)$ ist Martingal $\Leftrightarrow \mathbf{E}(\mathcal{E}_\lambda(M)) = 1$).

□

Beispiel 5.2.5. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und M eine 1-dimensionale BB. Dann ist
$X = \mathcal{E}_\lambda(M)$ geometrische BB, $X_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$ und X_t löst

$$\mathrm{d}X_t = \lambda X_t \ \mathrm{d}B_t.$$

5.3 Lévy's Charakterisierung der BB

Satz 5.3.1 (P. Lévy)**.** *Gegeben sei X stetig, $\mathbb{R}^d$-wertig und $(\mathscr{F}_t)_t$-adaptiert mit $X_0 = 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *X ist BB (bzgl. $(\mathscr{F}_t)$).*

(ii) *$X \in \mathcal{M}^0_{loc}$ und $\langle X^k, X^j \rangle = \delta_{kj} t \quad (\forall k, j = 1, \dots, d)$.*

(iii) *$X \in \mathcal{M}^0_{loc}$ und $\forall f = (f_1, \dots, f_d)$ mit $f_k \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$:*

$$M_t := \exp\left(i \sum_k \int_0^t f_k(s) \ \mathrm{d}X^k_s + \frac{1}{2} \sum_k \int_0^t f_k^2(s) \ \mathrm{d}s \right) \in \mathcal{M} + i\mathcal{M} = \mathbb{C} \cdot \mathcal{M}$$

Beweis. **(i) $\Rightarrow$ (ii):** siehe vorherigen Beweis.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $M_t = \mathcal{E}_i(f \bullet X) \in \mathcal{M} + i\mathcal{M}$ exponentielles Martingal zu Martingal $f \bullet X$ mit Parameter $\lambda = i = \sqrt{-1}$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $z \in \mathbb{R}^d, r > 0$ und $f = z \cdot \mathbb{1}_{[0,r[}$
$\Rightarrow M_t = \exp\left[i(z, X_{t\wedge r}) + \frac{1}{2}\|z\|^2(t \wedge r)\right] \in \mathcal{M} + i\mathcal{M}$
$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}_s$ und $s < t < r$: Wegen $\int\limits_A M_t \, \mathrm{d}\mathbf{P} = \int\limits_A M_s \, \mathrm{d}\mathbf{P}$ gilt:

$$\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_A \exp\left[i(z, X_t - X_s)\right]\right) = \mathbf{P}(A) \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\|z\|^2(t-s)\right]$$

$\Rightarrow X_t - X_s$ unabhängig von $\mathscr{F}_s$ und Gauß-verteilt nach ν_{t-s}
$\Rightarrow \mathbf{E}\left(\exp\left[i(z, X_t - X_s)\right] | \mathcal{F}_s\right) = \exp\left[-\frac{1}{2}\|z\|^2(t-s)\right] = \mathbf{E}\left(\exp\left[i(z, X_t - X_s)\right]\right)$ □

Wichtig hierbei: X stetig!
Ansonsten sind die Voraussetzung auch erfüllt für $X_t = N_t - t$ mit N Poisson-Prozess.

Korollar 5.3.2. *Sei $X \in \mathcal{M}^*_{loc}$ mit $\langle X \rangle_t = t$. Dann ist X eine BB.*

Korollar 5.3.3. *Sei $X \in \mathcal{M}^*_{loc}$ mit $t \mapsto X_t^2 - t \in \mathcal{M}^*_{loc}$. Dann ist X eine BB.*

Beispiel 5.3.4 (Brown'sche Brücke)**.** Sei B eine Brown'sche Bewegung mit $B_0 = 0$. Definiere
$X_t = (1-t)B_{t/1-t}$ Brownsche Brücke für $t \in [0,1[$
und $V_t = X_t + \int\limits_0^t \frac{X_s}{1-s} \, \mathrm{d}s, \quad t \in [0,1[$
Dann ist $X \in \mathcal{S}$ mit $\langle X \rangle_t = t$.
Denn sei $B'_t = B_{t/1-t} \Rightarrow B'$ Martingal bzgl. $\mathscr{F}'_t = \mathcal{F}_{t/1-t}$ und $\langle B' \rangle_t = \frac{t}{1-t}$
$X_t = (1-t)B'_t = -\int\limits_0^t B'_s \, \mathrm{d}s + \int\limits_0^t (1-s) \, \mathrm{d}B'_s$
$\langle X \rangle_t = \int\limits_0^t (1-s)^2 \, \mathrm{d}(\frac{s}{1-s}) = \cdots = t.$
Aber X ist nicht die BB! X ist kein Martingal.
Schließlich

$$V_t = X_t + \int\limits_0^t \frac{X_s}{1-s} \, \mathrm{d}s = (1-t)B'_t + \int\limits_0^t B'_s \, \mathrm{d}s = \int\limits_0^t (1-s) \, \mathrm{d}B'_s \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$$

Ferner gilt $\langle V \rangle_t = \langle X \rangle_t = t$.
Also ist $(V_t)_{t \in [0,1[}$ eine 1-dimensionale BB bzgl. $(\mathscr{F}'_t) = \mathscr{F}_{t/1-t}$. Aber $V_t \neq B_t$.

Beispiel 5.3.5 (Ornstein-Uhlenbeck-Prozess)**.** Sei $Y_t = e^{-\lambda t} B_{e^{2\lambda t}}, \ t \in \mathbb{R}$. Dann ist $Y \in \mathcal{S}$ mit $\langle Y \rangle_t = t$.
Definiere $W_t = Y_t - Y_0 + \lambda \int Y_s \, \mathrm{d}s$. Es gilt $W \in \mathcal{M}$ und $\langle W \rangle_t = t$. Also ist $(W_t)_{t \geq 0}$ eine BB bzgl. $(\mathscr{F}_{e^{2\lambda t}})_{t \geq 0}$. Aber $W_t \neq B_t$.

5.4 Bessel-Prozesse

Sei $(\mathbf{P}^x, B_t)_{x\in\mathbb{R}^N}$ eine N-dimensionale BB auf $\mathbb{R}^N$ und $R_t = \|B_t\|$ sowie $Q_t = R_t^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} {B_t^{(i)}}^2$.

<u>Vorbemerkung:</u>

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$ mit $\|x\| = \|y\|$ gilt: $\mathbf{P}^x(R_t \in \cdot) = \mathbf{P}^y(R_t \in \cdot)$ denn sei $y \in Qx$ mit Q orthogonale Transformation des $\mathbb{R}^N$
$\Rightarrow \mathbf{P}^x(R_0 \in \cdot) = \mathbf{P}^x(\|B_0\| \in \cdot) = \mathbf{P}^{Qx}(\|QB_0\| \in \cdot) = \mathbf{P}^y(R_0 \in \cdot)$.
Daher: $\forall r \geq 0 : \exists$ W-Maß $\widehat{\mathbf{P}}^r$ mit $\widehat{\mathbf{P}}^r(R_0 \in \cdot) = \mathbf{P}^x(R_0 \in \cdot) \quad (\forall x \text{ mit } \|x\| = r)$.
$(\widehat{\mathbf{P}}^r, R_t)_{r\geq 0}$ heißt N-dim Bessel Prozess auf $[0,\infty[= \mathbb{R}_+$
$(\widehat{\mathbf{P}}^r, Q_t)$ heißt N-dim Bessel-Quadrat-Prozess.

(ii) Nach Itô-Formel ist Q ein Semimartingal mit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Q_t &= 2\sum_{i=1}^{N} B_t^{(i)}\ \mathrm{d}B_t^{(i)} + N\ \mathrm{d}t \\ &= 2B_t\ \mathrm{d}B_t + N\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Satz 5.4.1. *Sei B N-dimensionale BB, startend in $x \in \mathbb{R}^N, N \geq 2$, und $R = \|B\|$ N-dim Bessel-Prozess, startend in $r = \|x\| \geq 0$.*

(i) *Dann ist $X = \sum\limits_{i=1}^{N} X^{(i)}$ mit $X_t^{(i)} = \int\limits_0^t \frac{B_s^{(i)}}{R_s}\ \mathrm{d}B_s^{(i)}$ eine stand. 1-dim BB.*

(ii) *Der Bessel-Prozess erfüllt die SDG*

$$\mathrm{d}R_t = \frac{N-1}{2R_t}\ \mathrm{d}t + \ \mathrm{d}X_t$$

(i.S.v. $R_t = R_0 + \int\limits_0^t \frac{N-1}{2R_s}\ \mathrm{d}s + X_t$).

Beweis. Wegen

$$\lambda^1\left(\{s \in [0,t] : R_s = 0\}\right) \leq \lambda^1\left(\{s \in [0,t] : B_s^{(i)} = 0\}\right) = 0$$

ist $X_t^{(i)}$ wohldefiniert und ebenso die SDG.

(i) Es gilt: $\left|\frac{B_s^{(i)}}{R_s}\right| \leq 1 \Rightarrow X_t^{(i)} \in \mathcal{M}$

$$\langle X^{(i)}, X^{(j)}\rangle_t = \int_0^t \frac{1}{R_s^2} B_s^{(i)} B_s^{(j)} \delta_{ij}\ \mathrm{d}s = \delta_{ij} \cdot \frac{{B^{(i)}}^2(s)}{R^2(s)} t$$

$\Rightarrow \langle X\rangle_t = \sum\limits_{i,j} \langle X^{(i)}, X^{(j)}\rangle_t = t$
$\Rightarrow X = $ 1-dim BB, $X_0 = 0$.

(ii) Sei $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, F(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$ und $\forall k \in \mathbb{N}$:
$F_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, F_k \in \mathcal{C}^\infty,\ F_k = F$ auf $\{x : \|x\| \geq 1/k\}$.
Sei $T_{k,l} = \inf\{t \geq \frac{1}{l} : \|B_t\| < 1/k\}$. Dann folgt für $k \to \infty$
$T_{k,l} \to T_l = \{t \geq \frac{1}{l} : \|B_t\| = 0\} = +\infty$ (wegen $N \geq 2$!) f.s.
Nach der Itô-Formel gilt auf $\{(t,w) : T_k(w) \geq t > \frac{1}{l}\}$:

$$\begin{aligned} F(B_t) &= F(B_{1/l}) + \int_{1/l}^{t} \sum_{i=1}^{N} \frac{B_s^{(i)}}{\|B_s\|}\, \mathrm{d}B_s^{(i)} + \frac{1}{2}\int_{1/l}^{t} \sum^{N} \frac{1}{\|B_s\|}\, \mathrm{d}s \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_{1/l}^{t} \sum_{i,j} \frac{B_s^{(i)} B_s^{(j)}}{\|B_s\|^3}\, \mathrm{d}\langle B^{(i)}, B^{(j)}\rangle_s \\ &= F(B_{1/l}) + X_t - X_{1/l} + \frac{1}{2}\int_{1/l}^{t} \frac{N-1}{R_s}\, \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

denn $\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\|x\|}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\delta_{ij}}{\|x\|} - \frac{x_i x_j}{\|x\|^3}\quad (\forall i,j = 1,\ldots,N)$
$\Rightarrow F(B_t) = F(B_{1/l}) + X_t - X_{1/l} + \frac{1}{2}\int_{1/l}^{t} \frac{N-1}{R_s}\, \mathrm{d}s$ auf $\bigcup_{k,l}\{T_k \geq t > \frac{1}{l}\} =]\frac{1}{l}, \infty[\times \Omega$.
$\Rightarrow$ Stetigkeit von $F(B_0)$ und X_0.
$F(B_t) = F(B_0) + X_t - X_0 + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{N-1}{R_s}\, \mathrm{d}s$ auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ f.s.

□

Proposition 5.4.2. (i) $N = 1, \alpha \geq 0$*:* $\mathbf{P}^x(\|B_t\| = \alpha, \exists t > 0) = 1$

(ii) $N \geq 2 : \mathbf{P}^x(\|B_t\| = 0, \exists t > 0) = 0$

(iii) $N = 2, \alpha > 0$*:* $\mathbf{P}^x(\|B_t\| = \alpha, \exists t > 0) = 1$
$N \geq 3, \alpha > 0$*:* $\mathbf{P}^x(\|B_t\| = \alpha, \exists t > 0) = \left(\frac{\alpha}{|x|} \wedge 1\right)^{N-2}$

(iv) $N \geq 3$*:* $\mathbf{P}^x(\lim_{t\to\infty} \|B_t\| = \infty) = 1$

Bemerkungen 5.4.3. ad (iii) LHS$=\mathbf{P}^x(\inf_{t>0} \|B_t\| \leq \alpha)$.
Stets gilt $\mathbf{P}^x(\sup_{t>0} \|B_t\| \geq \alpha) = 1\ (\forall \alpha \geq 0, \forall N \geq 1)$ und
$\mathbf{P}^x(\limsup_{t\to\infty} \|B_t\| = \infty) = 1$ (Satz vom iterierten Logarithmus)

(iv') Für $N \leq 2$ gilt:

$$\mathbf{P}^x(\liminf_{t\to\infty} \|B_t\| = 0) = 1.$$

Beweis. von d) und d'):
Sei $\alpha > 0, S_0 = T_0 = 0$
$S_k = \inf\{t > T_{k-1} : \|B_t\| \leq \alpha\}$
$T_k = \inf\{t > S_k : \|B_t\| \geq k\}$
$\Rightarrow \mathbf{P}^x(T_k < \infty) = \mathbf{P}^x(S_k < \infty)$ (iterierter Logarithmus z.B.)
$\mathbf{P}^x(S_{k+1} < \infty) = \mathbf{P}^x(T_k < \infty) \cdot \left(\frac{\alpha}{k} \wedge 1\right)^{N-2}$.
Im Fall $N = 2$:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}^x(S_k < \infty) = 1 \quad (\forall k) \\
\Rightarrow\ & \mathbf{P}^x(S_k < \infty, \forall k) = 1 \\
\Rightarrow\ & \mathbf{P}^x(\liminf_{t\to\infty} \|B_t\| \leq \alpha) = 1 \quad (\forall \alpha > 0) \\
\Rightarrow\ & \mathbf{P}^x(\liminf \|B_t\| = 0) = 1
\end{aligned}$$

Im Fall $N \geq 3$:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}^x(S_k < \infty) \leq \prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\alpha}{i}\right)^{N-2} \\
\Rightarrow\ & \mathbf{P}^x(S_k < \infty, \forall k) = 0 \\
\Rightarrow\ & \mathbf{P}^x(\liminf \|B_t\| \leq \alpha) = 0 \quad (\forall \alpha > 0) \\
\Rightarrow\ & \mathbf{P}^x(\liminf \|B_t\| = \infty) = 1
\end{aligned}$$

□

Also: Die BB in $\mathbb{R}^N$ ist

- **transient**, falls $N \geq 3$
- **rekurrent**, falls $N \leq 2$
  (sogar „punkt-rekurrent“, falls $N = 1$).

Punkte des R^N sind polar für die BB $\Leftrightarrow N \geq 2$.

6 Brownsche Martingale

6.1 Zeitwechsel

Wir nehmen an, dass $(\Omega, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbf{P})$ filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit den üblichen Bedingungen (also vollständig und rechtsstetig) ist.

Definition 6.1.1. *Ein* Zeitwechsel $(T_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *ist ein wachsender rechtsstetiger Prozess* $T_t : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+, t \in \mathbb{R}_+$ *mit* T_t *jeweils Stoppzeit.*

Beispiele 6.1.2. (i) $T_t := \sigma \wedge t$ (Stoppung durch Stoppzeit σ)

(ii) $T_t := \sigma + t$ (Shift um Stoppzeit σ)

(iii) $T_t := \inf\{s \geq 0 : A_s > t\}$, wobei (A_t) adaptiert, rechtstetig und wachsend ($\inf \emptyset = +\infty$)

Bemerkung 6.1.3. Jeder Zeitwechsel ist von der Form (iii) mit

$$A_t := \inf\{s \geq 0 : T_s > t\}, \quad \overline{\mathbb{R}}_+\text{-wertig.}$$

Lemma 6.1.4. *Sei* $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *wachsend, rechtsstetig* $\to a^* : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}_+}$*:*

$$\left.\begin{array}{rclcccc} a^*(t) & := & \inf\{s : a(s) > t\} & \equiv & \sup\{s : a(s) \leq t\} & \equiv & \mathit{Leb}\{a \leq t\} \\ a_*(t) & := & a^*(t-) & \equiv & \mathit{Leb}\{a \leq t\} & \equiv & \begin{array}{c}\inf\{s : a(s) \geq t\} \\ \sup\{s : a(s) < t\}\end{array} \end{array}\right\} \textit{links- bzw. rechtsstetige Verteilungsfunktion von } a$$

(i) a_* *ist linksstetig,* a^* *ist rechtsstetig.*

(ii) $\{a = t\} = [a_*(t), a^*(t)[$ *oder* $[a_*(t), a^*(t)] \cap \mathbb{R}_+$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$ *Insbesondere gilt:* $\{a = t\}$ *abgeschlossen.* $\Rightarrow \{a = t\} = [a_*(t), a^*(t)] \cap \mathbb{R}_+$.
$\Rightarrow a_*$ *kleinste,* a^* *größte Rechtsinverse von* $a : \mathbb{R}_+ \to a(\mathbb{R}_+)$

(iii) $a(t) = \inf\{s : a^*(s) > t\} (\equiv a^{**}(t)$ *falls* $\underbrace{a^* < \infty}_{d.h.\ a \nearrow \infty})$

Insbesondere ist die Rolle von a *und* a^* *symmetrisch, falls man für* a *auch den Wert* ∞ *zulässt.*

Beweis. (ii) $\{a = t\} = \emptyset$**:** Dann ist $a_*(t) = a^*(t)$ und somit $\{a = t\} = [a_*(t), a^*(t)[= \emptyset$

$\{a = t\} \neq \emptyset$**:** Dann ist $a_*(t) < \infty$ und $\{a = t\}$ ist ein Intervall der Länge

$$\mathrm{Leb}(\{a = t\}) = \mathrm{Leb}(\{a \leq t\}) - \mathrm{Leb}(\{a < t\}) = a^*(t) - a_*(t)$$

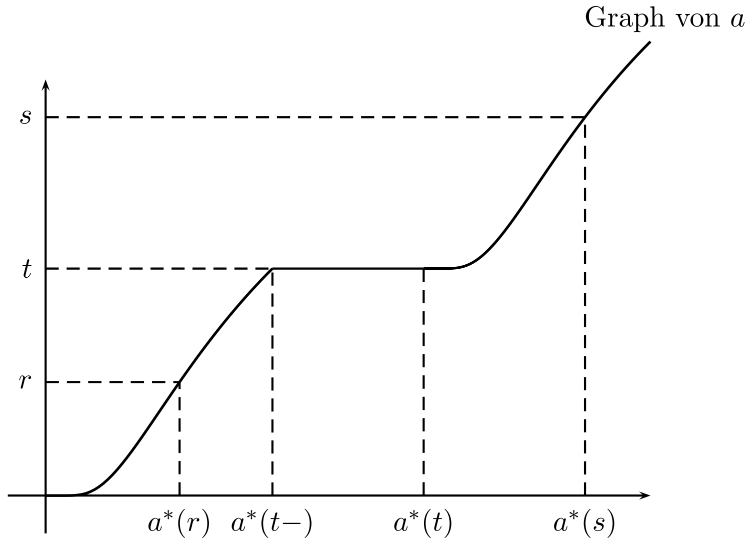

Abbildung 6.1: Darstellung der Rechts- und Links-Inversen von a

Sei $s :=$ linker Endpunkt von $\{a = t\}$. Bleibt zu zeigen: $\underbrace{a(s) = t}_{\text{Klar, da } a \text{ rechtsstetig}}$ und

$s = a_*(t)$, aber $s = \inf\{r : a(r) = t\} \overset{a \text{ rechtsstetig}}{=} \inf\{r : a(r) \geq t\} = a_*(t)$

(iii) $\int\{r : a(r) > s\} = a^* > t \Rightarrow a(t) \leq s$, da $a(t) \leq \inf\{s : a^*(s) > t\}$.

Umgekehrt ist $a^*(a(t)) \geq t \; \forall t$.
Insbesondere $a^*(a(t+\epsilon)) \geq t + \epsilon > t. \Rightarrow a(t+\epsilon) \geq \inf\{s : a^*(t) > t\} \quad \forall \epsilon > 0.$
$\overset{a \text{ rechtsstetig}}{\Rightarrow} a(t) \geq \inf\{s : a^*(t) > t\}$

$\square$

Definition 6.1.5. *Sei $b : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ wachsend und rechtsstetig. Eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ heißt b-*stetig*, wenn $f|_{[b(t-),b(t)]}$ für alle t mit $b(t) < \infty$ konstant ist.*

Beispiel 6.1.6. Sei $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ wachsend, stetig (somit ist $a^* : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ wachsend und rechtsstetig). Dann ist a a^*-stetig.

Denn: Sei $\underbrace{a^*(t-)}\, a_*(t) \leq s \leq a^*(t) < \infty \overset{\text{Lem 6.1.4 (ii)}}{\Rightarrow} a(s) = a(a^*(t))$

Definition 6.1.7. *Sei X ein adaptierter Prozess mit Werten in $\mathbb{R}$ (oder $\overline{\mathbb{R}}$). Wir nennen $(T_t)_t$ einen endlichen Zeitwechsel, falls $T_t < \infty$ f.s., bzw. (T_t) einen beliebigen Zeitwechsel, falls $X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t$ in $\overline{\mathbb{R}}$ $\mathbf{P}$-f.s. existiert. Dann ist $\widehat{X} : \widehat{X}_t := X_{T_t}$ adaptiert an $\widehat{\mathscr{F}}_t := \mathscr{F}_{T_t} \equiv \{A \in \mathscr{F}_\infty : A \cap \{T_t \leq r\} \in \mathscr{F}_r \quad \forall r \in \mathbb{R}_+\}$.*

Bemerkung 6.1.8. $(\widehat{\mathscr{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ erfüllt wieder die üblichen Bedingungen.

Denn:

Vollständigkeit: ✓

Rechtsstetigkeit: Sei $A \in \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_{T_s}$. Zu zeigen: $A \in \mathscr{F}_{T_t}$.

$$A \cap \{T_t < r\} \overset{T \text{ wachsend und}}{\underset{\text{rechtsstetig}}{=}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{A \cap \{T_{t+\frac{1}{n}} < r\}}_{\text{nach Vor. } A \in \mathscr{F}_{T_{t+\frac{1}{n}}}} \in \mathscr{F}_r$$

$$A \cap \{T_t \leq r\} = \bigcap_{n \geq k} A \cap \{T_t < r + \frac{1}{n}\} \in \mathscr{F}_{r+\frac{1}{k}} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

d.h. $A \cap \{T_t \leq r\} \in \mathscr{F}_{r+} = \mathscr{F}_r$

Bemerkung 6.1.9. Offensichtliche Probleme:

(i) Lokale Martingale sind nicht invariant unter Zeitwechsel:
Z.B.: Sei X eine Brown'sche Bewegung, $A_t = \max_{0 \leq s \leq t} X_s, T_t := \inf\{s \geq 0 : A_s > t\}$.
Dann
$$\widehat{X}_t := X_{T_t} = t$$

(ii) Sei (T_t) rechtsstetig, aber nicht stetig. Dann ist $\widehat{X}$ im Allgemeinen nicht stetig, obwohl X stetig.

Definition 6.1.10. *Sei (T_t) ein Zeitwechsel. Ein Prozess X heißt (T_t)-stetig, falls* $\underbrace{X_\cdot(\omega) \quad T_\cdot(\omega)\text{-stetig}}_{\text{d.h. } t \mapsto X_t(\omega) \text{ konstant auf allen Sprungintervallen } [T_{t-}(\omega), T_t(\omega)] \text{ mit } T_t(\omega) < \infty}$ *für fast alle $\omega \in \Omega$.*

Beispiel 6.1.11. Sei $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$. Dann ist $T_t := \inf\{s \geq 0 : \langle X \rangle_x > t\}$.
$\overset{1}{\Rightarrow} \langle x \rangle$ ist (T_t)-stetig $\iff$ X ist (T_t)-stetig.

Denn: Zu $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ $\exists$ Nullmenge N: $\forall \omega \notin N, r < s$ $\langle X \rangle_r(\omega) = \langle X \rangle_s(\omega) \iff X_\cdot(\omega)|_{[r,s]}$ konstant.

Bemerkung 6.1.12.
$$\langle X \rangle_{T_t} = t \wedge \langle X \rangle_\infty$$

Bemerkung 6.1.13. Sei $X \in \mathscr{M}^2 := \{$ stetige L^2-beschränkte Martingale$\}$.
Dann folgt:

(i) $X_\infty := \lim_{t \to \infty} X_t$ existiert f.s. und in L^2, und $X_T = \mathbf{E}[X_\infty | \mathscr{F}_T]$ $\forall$ Stoppzeiten T.

(ii) $X^* := \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |X_t| \in L^2$ und $\langle X \rangle_\infty \in L^1$.

Satz 6.1.14. *Sei (T_t) ein beliebiger Zeitwechsel. Ferner sei $X \in \mathscr{M}^2$ und X T_t-stetig. Dann ist $\widehat{X} \in \widehat{\mathscr{M}^2} := \{$stetigen L^2-beschränkten $\widehat{\mathscr{F}_t}$-Martingale$\}$ (d.h. $\widehat{X}_t = X_{\tau_t} \in \mathscr{M}^2$ (bzgl. $\widehat{\mathcal{F}_t} = \mathcal{F}_{T_t}$)) und*
$$\langle \widehat{X} \rangle_t = \widehat{\langle X \rangle}_t - \langle X \rangle_{T_0}.$$

Beweis. Sei X (T_t)-stetig $\iff$ $\langle X\rangle$ T_t-stetig, insbesondere $\widehat{X}, \widehat{\langle X\rangle}$ stetige Prozesse. Dann ist

$$X_{T_t} = \mathbf{E}[X_\infty | \mathscr{F}_{T_t}], \text{ d.h. } \widehat{X} \in \widehat{\mathscr{M}}^2.$$

$X^2 - \langle X\rangle \in \mathscr{M}$ majorisiert durch $(X^*)^2 + \langle X\rangle_\infty \in L^1$.
$\Rightarrow X_{T_t} - \langle X\rangle_{T_t} = \mathbf{E}[(X^2 - \langle X\rangle)_\infty | \mathscr{F}_{T_t}]$, d.h. $\widehat{X}^2 - \widehat{\langle X\rangle} \in \widehat{\mathscr{M}}$, ebenso $\widehat{X}^2 - (\widehat{\langle X\rangle} - \langle X\rangle_{T_0}) \in \widehat{\mathscr{M}}$.
$\Rightarrow \widehat{\langle X\rangle} - \langle X\rangle_{T_0}$ ist quadratische Variation von $\widehat{X}$. □

Satz 6.1.15. *Sei (T_t) ein endlicher Zeitwechsel, $X \in \mathcal{M}_{loc}$ und X T_t-stetig. Dann ist $\widehat{X} \in \mathcal{M}_{loc} := \{$stetige lokale $(\widehat{\mathscr{F}_t})$Martingale$\}$ und $\langle \widehat{X}\rangle = \widehat{\langle X\rangle} - \widehat{\langle X\rangle}_0$*

Dafür zunächst folgendes Lemma:

Lemma 6.1.16. *Sei $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ wachsend und rechtsstetig und $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a-stetig. Dann $\forall t \in \mathbb{R}_+$:*

$$f(a(a_*(s) \wedge t)) = \begin{cases} f(s \wedge a(t)) & \iff s \geq a(0) \\ f(a(0)) & \iff 0 \leq s \leq a(0) \end{cases}$$

Beweis. Sei $a_*(s) := \inf\{r : a(r) \geq s\}$. Dann ist $s \leq a(t) \iff a_*(s) \leq t$ (Denn: "´⇒“ nach Definition und "´⇐“, da $a(t+\epsilon) \geq s\ \forall \epsilon \overset{a \text{ rechtsstetig}}{\Rightarrow} a(t) \geq s$)

Es gilt

$$\underbrace{a(a_*(s)-)}_{=\sup\{a(r):\underbrace{r < a_*(s)}_{a(r)<s}\}} \leq s \leq a(a_*(s)) \quad \forall s \in [a(0), a(\infty)] \cap \mathbb{R}_+$$

Nun ist f aber a-stetig, somit $f(s) = f(a(a_*(s)))$ für jedes solche s.
Damit

$$f(a(a_*(s) \wedge t)) = \begin{cases} f(a(0)) & \iff 0 \leq s < a(0) \\ f(s) & \iff a(0) \leq s \leq a(t) \\ f(a(t)) & \iff s > a(t) \end{cases}$$

□

des Satzes 6.1.15. Sei ohne Einschränkung $X_0 = 0$, σ eine Stoppzeti mit $X^\sigma \in \mathscr{M}^2$ und $\widehat{\sigma} := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : T_t \geq \sigma\}$.
Dann ist $\widehat{\sigma}$ eine $(\widehat{\mathscr{F}_t})$-Stoppzeit, denn $\{\widehat{\sigma} \leq t\} = \{\sigma \leq T_t\} \in \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_{T_t} \subseteq \mathscr{F}_{T_t}\ \forall t$.

$$\begin{aligned} \widehat{X}_t^\sigma &= \widehat{X}_{\widehat{\sigma} \wedge t} \\ &= X_{T_{\widehat{\sigma} \wedge t}} \\ &\overset{2}{=} \begin{cases} X_{\sigma \wedge T_t} & \text{auf } \{\sigma \geq T_0\} \\ X_{T_0} & \text{auf } \{\sigma < T_0\} \end{cases} \end{aligned}$$

Somit

$$\widehat{X}^{\widehat{\sigma}} - X_{T_0} = \widehat{X^\sigma} - X^\sigma_{T_0} \qquad \begin{matrix}\text{(auf } \{\sigma \geq T_0\} \text{ gemäß obigem} \\ \text{auf } \{\sigma < T_0\} \text{ mit } 0 = 0)\end{matrix} \tag{6.1}$$

Ebenso $\langle X \rangle$ (T_t)-stetig

$$\overset{\text{Rechnung in Fußnote mit } f = \langle X \rangle_\cdot(\omega)}{\Longrightarrow} \qquad \widehat{\langle X \rangle}^{\widehat{\sigma}} - \langle X \rangle_{T_0} = \widehat{\langle X^\sigma \rangle} - \langle X^\sigma \rangle_{T_0} \tag{6.2}$$

Wähle nun eine Folge $(\sigma_n)_n$ mit $X^{\sigma_n} \in \mathscr{M}^2$, $\sigma_n \nearrow \infty$. Z.B. $\sigma_n := \inf\{t : |X_t| > n\}$. Dann $\widehat{\sigma}_n \nearrow \infty$ f.s. (Denn: $\{\widehat{\sigma}_n \leq t\} = \{\sigma_n \leq T_t\} \searrow \emptyset$, da T_t endlich und $\sigma_n \nearrow \infty$).

$$X^{\sigma_n} \in \mathscr{M}^2 \quad \overset{\text{Satz 6.1.14}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{\widehat{X^{\sigma_n}} \in \widehat{\mathscr{M}^2}}_{\overset{6.1}{\Rightarrow} \widehat{X}^{\widehat{\sigma}_n} \in \widehat{\mathscr{M}^2}} \text{ und } \underbrace{\langle \widehat{X^{\sigma_n}} \rangle}_{\overset{6.1}{=} \underbrace{\langle \widehat{X}^{\widehat{\sigma}_n} \rangle}_{= \langle \widehat{X} \rangle^{\widehat{\sigma}_n}}} = \underbrace{\widehat{\langle X^{\sigma_n} \rangle} - \widehat{\langle X^{\sigma_n} \rangle}_0}_{\overset{6.2}{=} \widehat{\langle X \rangle}^{\widehat{\sigma}_n} - \langle X \rangle_{T_0}}$$

Damit $\widehat{X} \in \widehat{\mathcal{M}_{\text{loc}}}$ und $\langle \widehat{X} \rangle = \widehat{\langle X \rangle} - \langle X \rangle_{T_0}$ □

Definition 6.1.17. *Sei $X \in \mathscr{S}$ und F linksstetiger, adaptierter, lokal-beschränkter Prozess. Dann*

$$F \bullet X \in \mathscr{S} : \quad (F \bullet X)_t := \int_0^t F \, \mathrm{d}X$$

Satz 6.1.18. *Sei (T_t) ein endlicher Zeitwechsel, X und F wie oben, (T_t)-stetig. Dann ist*

$$\widehat{F} \bullet \widehat{X} = \widehat{F \bullet X} - (\widehat{F \bullet X})_0$$

Beweis. (i) $X \in \mathscr{A}$ (pfadweiser Fall):

Lemma 6.1.19 (Transformations-Lemma)**.** *Sei $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ wachsend und rechtsstetig, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ wachsend und stetig, g a-stetig, dann gilt: $g \circ a$ ist stetig.*

Mit diesem Lemma gilt dann:

$$\int_0^t (f \circ a) \, \mathrm{d}\mu_{f \circ a} = \int_{a(0)}^{a(t)} f \, \mathrm{d}\mu_g \quad \forall f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ messbar.}$$

(Dabei ist für $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ wachsend und rechtsstetig, μ_h das durch $\mu_h([0,t]) := h(t) - h(0)$ festgelegte Borelmaß auf $\mathscr{L}(\mathbb{R}_+$ "´Maß mit Verteilungsfunktion h“)

[2]Denn: Mit Lemma 6.1.16 mit $f = X_\cdot(\omega), a = T_\cdot(\omega) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ rechtsstetig, $\widehat{\sigma}(\omega) = a_*(\sigma(\omega))$ und nach Voraussetzung f a-stetig, $s = \sigma(\omega)$:

$$X_{T_{\widehat{\sigma} \wedge t}} = f(a(a_*(s) \wedge t)) = \begin{cases} f(s \wedge a(t)) = X_{\sigma \wedge T_t}(\omega) & \text{, falls} \sigma(\omega) \geq T_0(\omega) \\ f(a(0)) = X_{T_0}(\omega) & \text{, sonst} \end{cases}$$

Transformations-Lemma mit $a = T.(\omega), g = X.(\omega), f = F.(\omega)$:

$$\underbrace{\int_0^t (f \circ a)\ \mathrm{d}\mu_{g\circ a}}_{=\int_0^t \widehat{F}\ \mathrm{d}\widehat{X}} = \underbrace{\int_{a(0)}^{a(t)} f\ \mathrm{d}\mu_g}_{\int_{T_0}^{T_t} F\ \mathrm{d}X = \int_0^{T_t} F\ \mathrm{d}X - \int_0 T_0}$$

(ii) Sei $X \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$, linke Seite gleich $\widehat{F} \bullet \widehat{X}$ und rechte Seite gleich $\widehat{F \bullet X} - (F \bullet X)_{T_0}$. Dann bleibt zu zeigen, dass $\langle \text{l.S.} - \text{r.S.} \rangle = 0$. Dafür führen wir die Funktion $\zeta(X) := \widehat{X}$ ein.

$$\begin{aligned}
\langle \text{l.S.} - \text{r.S.} \rangle &= \langle \zeta(F) \bullet \zeta(X) - \zeta(F \bullet X) \rangle \\
&= \underbrace{\langle \zeta(F) \bullet \zeta(X) \rangle}_{=(*)} + \langle \zeta(F \bullet X) \rangle - 2 \underbrace{\langle \zeta(F) \bullet \zeta(X), \zeta(F \bullet X) \rangle}_{=(\dagger)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(*) &= \zeta(F^2) \bullet \langle \zeta(X) \rangle \overset{\text{Satz 6.1.15}}{=} \zeta(F^2) \bullet \zeta(\langle X \rangle) \\
&\overset{\text{pfadweiser Fall}}{=} \zeta F^2 \bullet \langle X \rangle) - (F^2 \bullet \langle X \rangle)_{T_0} \\
&= \zeta(\langle F \bullet X \rangle) - (F \bullet X)_{T_0} \\
&\overset{\text{Satz 6.1.15}}{=} \langle \zeta(F \bullet X) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\dagger) &= \langle \zeta(F) \bullet \zeta(X), \zeta(F \bullet X) \rangle = \zeta(F) \bullet \langle \zeta(X), \zeta(F \bullet X) \rangle \\
&\overset{\text{Satz 6.1.15}}{=} \zeta(F) \bullet \zeta(\langle X, F \bullet X \rangle) \\
&\overset{\text{pfadweiser Fall}}{=} \zeta(F \bullet \langle X, F \bullet X \rangle) - (F \bullet \langle X, F \bullet X \rangle)_{T_0} \\
&= \zeta(\langle F \bullet X \rangle) - \langle F \bullet X \rangle_{T_0} \\
&\overset{\text{Satz 6.1.15}}{=} \langle \zeta(F \bullet X) \rangle
\end{aligned}$$

□

6.2 Lokale Martingale und zeittransformierte BBen

Satz 6.2.1. *Sei (X_t) eine d-dimensionale BB bzgl. $(\mathcal{F}_t)$ und τ eine endliche Stoppzeit. Dann ist $B_t = X_{\tau+t} - X_\tau$ eine BB bzgl. $(\mathcal{F}_{\tau+t})$.*

Beweis. Sei $T - t = \tau + t$ ein endlicher Zeitwechsel. Dann ist $(B_t)_t$ ein d-dimensionales Martingal und

$$\langle B^{(i)}, B^{(j)} \rangle_t = \langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_{\tau+t} - \langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_\tau = \delta_{i,j}(\tau + t) - \delta_{i,j} \cdot t$$

Somit ist $(B_t)_t$ eine BB. □

Satz 6.2.2 (Dubins-Schwarz). *Sei $X \in \mathcal{M}^\circ_{loc}$ mit $X_0 = 0$ und $\langle X\rangle_\infty = \infty$ f.s. und sei $\tau_t = \inf\{s \geq 0 \;:\; \langle X\rangle_s > t\}$, dann ist $B_t = X_{\tau_t}$ eine 1-dimensionale, standard Brown'sche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}_{\tau_t})$ und $X_t = B_{\langle X\rangle_t}$.*

Beweis. (T_t) ist ein endlicher Zeitwechsel, da $\langle X\rangle_\infty = \infty$ f.s. und $(X_t)_t$ ist $(T_t)_t$-stetig („Wenn $\langle X\rangle_t$ konstant, dann auch X_t").
$\Rightarrow B$ ist somit $(\mathscr{F}_{T_t})$-lokales Martingal mit $B_0 = 0$ und $\langle B\rangle_t = \langle X\rangle_{T_t} = t$
$\Rightarrow B$ ist 1-dimensionale standard BB □

Definition 6.2.3. *Sei τ eine Stoppzeit. Ein Prozess $(B_t)_{t\geq 0}$ heißt* bei τ gestoppte standard BB*, falls*

- $B \in \mathcal{M}^\circ_{loc}$
- $\langle B\rangle_t = t \wedge \tau$

Satz 6.2.4. (i) *Sei $X \in \mathcal{M}^\circ_{loc}$ und definiert durch*

$$B_t = \begin{cases} X_{T_t} & ,t < \langle X\rangle_\infty \\ X_\infty, & , \textit{sonst} \end{cases}$$

(wobei $X_\infty := \lim\limits_{t\to\infty} X_t$ auf $\{\langle X\rangle_\infty\}$ existiert!).
Dann ist $(B_t)_{t\geq 0}$ eine bei $\tau = \langle X\rangle_\infty$-gestoppte standard BB, d.h. $B \in \mathcal{M}^\circ_{loc}$ und $\langle B\rangle_t = t\wedge\tau$.

(ii) *Für jede bei einer Stoppzeit gestoppte BB B (auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathscr{F}_t), \mathbf{P})$) existiert eine Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\widetilde{\Omega}, (\widetilde{\mathscr{F}_t}), \widetilde{\mathbf{P}})$ und darauf eine BB $\widetilde{B}$ mit $B \circ \pi = \widetilde{B}^\tau$, wobei $\pi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ die Projektion ist.*

Beweis. (i) Sei (T_t) ein beliebiger Zeitwechsel, $T_t^{(n)} = T_t \wedge n$ endlich $\forall n$. $B_t^{(n)} := X_{T_t^{(n)}}$.
Dann ist

$$\langle B^{(n)}\rangle_t = \langle X\rangle_{T_t\wedge n} = t \wedge \langle X\rangle_n \nearrow t \wedge \langle X\rangle_\infty$$

(ii) Wähle Einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', (\mathscr{F}'_t), \mathbf{P}')$ mit BB B' und bilde $\widetilde{\Omega} = \Omega \times \Omega'$, $\widetilde{F}_t = \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{F}'_t$, $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \otimes \mathbf{P}'$.

$$\begin{aligned} \widetilde{B}_t(\omega,\omega') &:= \begin{cases} B_t(\omega) & \text{, falls } t < \tau(\omega) \\ B_\tau(\omega) + B'_t(\omega') - B'_{\tau(\omega)}(\omega') & \text{, falls } t \geq \tau(\omega) \end{cases} \\ &= \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau(\omega)]}\, \mathrm{d}B_s(\omega) + \int_0^t \mathbb{1}_{]\tau(\omega),\infty[}(s)\, \mathrm{d}B'_s(\omega') \end{aligned}$$

$\Rightarrow \widetilde{B} \in \mathcal{M}^\circ_{\mathrm{loc}}$ und

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{B}\rangle_t(\omega,\omega') &= \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau(\omega)]}\, \mathrm{d}s + \int_0^t \mathbb{1}_{]\tau(\omega),\infty[}(s)\, \mathrm{d}s + 2\int_0^1 \mathbb{1}_{]\tau(\omega),\infty[}\, \mathrm{d}\underbrace{\langle B, B'\rangle_s}_{=0,\text{ da unabh.}} \\ &= t \end{aligned}$$

$\Rightarrow \widetilde{B}$ ist BB.

$\square$

6.3 Darstellung als stochastische Integrale

Gegeben (und im folgenden fix): $B = (B_t)_{t \geq 0}$ 1-dimensionale stand. BB mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Definition 6.3.1. (i) *(B_t) heißt $(\mathcal{F}_t)$-BB, falls B eine an $(\mathcal{F}_t)$ adaptierte BB ist und $\forall t \geq 0$ der Prozess $X = (X_s)_{s \geq 0}$ mit $X_s = B_{t+s} - B_t$ unabhängig von $\mathcal{F}_t$ ist.*

(ii) *$(\mathcal{F}_t)$ heißt* Brown'sche Filtrierung, *falls es die kleinste Filtrierung ist, die die üblichen Bedingungen erfüllt, und bzgl. der B messbar ist.*
Also $\mathcal{F}_t = \overline{\mathcal{F}_{t+}^0}$ mit ${\mathcal{F}_t}^0 = \sigma(B_s : s \leq t)$.

Es sei nun J die Menge der deterministischen Elementarprozesse $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ der Form $f = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot 1_{]t_{j-1}, t_j]}(t)$.
$\mathcal{E}^{f \cdot B}$ bezeichne das exponentielle Martingal zu
$F_t = f \cdot B_t = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j (B_{t_j \wedge t} - B_{t_{j-1} \wedge t})$. Also insbesondere

$$\mathcal{E}_t^{f \bullet B} = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (B_{t \wedge t_j} - B_{t \wedge t_{j-1}}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 (t \wedge t_j - t \wedge t_{j-1}) \right)$$

und

$$\mathcal{E}_\infty^{f \bullet B} = \exp\left(F_\infty - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1}) \right) = \text{ const} \cdot \exp(F_\infty).$$

Lemma 6.3.2. *Sei $(\mathcal{F}_t)_t$ Brownsche Filtration. Die Menge $\{\mathcal{E}_\infty^{f \cdot B} : f \in J\}$ ist total in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$, d.h. der Abschluss der linearen Hülle $\overline{\text{lin}}\{\mathcal{E}_\infty^{f \cdot B} : f \in J\} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$.*

Beweis. Annahme: Die Behauptung gilt nicht.

(i) Wir fixieren ein $0 \neq Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ mit Y orthogonal zu jedem $\mathcal{E}_\infty^{f \cdot B}$ für $f \in J$.
Wir wollen zeigen: $Y \cdot P$ ist Null-Maß auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ ($\iff$ $Y = 0$ in L^2).
Dazu genügt es zu zeigen:
$Y \cdot P$ ist Null-Maß auf $(\Omega, \sigma(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}))$ für jede endliche Folge $(t_1, \ldots, t_n)$.
Fixiere eine solche Folge mit $t_0 = 0$.

(ii) Die Funktion $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = \mathbf{E}\left(\exp\left(\sum\limits_{j=1}^{n} z_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right) \cdot Y\right)$ ist holomorph.

Denn:

$$\begin{aligned}\varphi(z_1, \ldots, z_n) &= \mathbf{E}\left(\exp(\sum z_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})) \cdot \mathbf{E}(Y|B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})\right) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\sum_{j=1}^{n} z_j(x_j - x_{j-1})\right) \cdot g(x_1, \ldots, x_n)\mu(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n)\end{aligned}$$

mit $\mu = \underbrace{(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})_* \mathbf{P}}_{\text{„Push-Forward“}} = P_{(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})}$ gemeinsame Verteilung von $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ und geeignetem g (faktorisierter bedingter Erwartung) mit $\mathbf{E}(Y|B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) = g(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$.

(iii) Nach Voraussetzung ist Y orthogonal zu jedem $\mathcal{E}_\infty^{f \cdot B}$ für $f \in J$, d.h. insbesondere $\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0 \quad \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \varphi \equiv 0$ auf $\mathbb{C}^n$

$\Rightarrow \mathbf{E}\left(\exp\left[i \sum z_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right] \cdot Y\right) = 0 \quad (\forall z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n)$

Dieses entspricht der Fourier-Transformation der Verteilung von

$$(B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$$

unter dem Maß $Y \cdot P$.

$\Rightarrow$ das Maß $Y \cdot P$ ist Null auf

$$\sigma\left(B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right) = \sigma(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$$

(denn $B_{t_0} = B_0 = 0$).

$\square$

Proposition 6.3.3. *$\forall F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P) : \exists! H \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, Pred, \lambda \otimes \mathbf{P})$ mit*

$$F = \mathbf{E}(F) + \int\limits_0^\infty H_s \, \mathrm{d}B_s \tag{6.3}$$

Hier $Pred = \mathcal{P} =$ vorhersagbare σ-Algebra.

Beweis. (i) Sei $\mathcal{H} = \{F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ mit der Darstellung (6.3) für ein $H \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathrm{Pred}, \lambda \otimes \mathbf{P})\}$.

Für $F \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\mathbf{E}(F^2) = \mathbf{E}(F)^2 + \mathbf{E}\left(\int\limits_0^\infty H_s^2 \, \mathrm{d}B_s\right) \tag{6.4}$$

Folglich: Ist $(F^{(n)})_n$ Cauchy-Folge in $\mathcal{H} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$, so ist die zugehörige Folge $(H^{(n)})_n$ Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \text{Pred}, \lambda \otimes \mathbf{P})$.
Also $H^{(n)} \to H \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \text{Pred}, \lambda \otimes \mathbf{P})$.
Ferner gilt

$$\mathbf{E}(F^{(n)}) \to \mathbf{E}(F)$$

und damit $F = \mathbf{E}(F) + \int\limits_0^\infty H_s \, \mathrm{d}B_s$, d.h. $F \in \mathcal{H}$ und damit:
$\mathcal{H}$ ist abgeschlossen (in $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \text{Pred}, \lambda \otimes \mathbf{P})$).

(ii) Andererseits gilt: $\mathcal{H} \supset \{\mathcal{E}_\infty^{f \cdot B} : f \in J\}$, denn mit der Itô-Formel folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\infty^{f \cdot B} &= 1 + \int_0^\infty \mathcal{E}_s^{f \cdot B} f(s) \, \mathrm{d}B_s \\ &= \mathbf{E}(\mathcal{E}_\infty^{f \cdot B}) + \int_0^\infty H_s \, \mathrm{d}B_s \end{aligned}$$

(iii) Ferner: $\mathcal{H} = \text{lin}\mathcal{H}$ und $\overline{\text{lin}}\{\mathcal{E}_\infty^{f \cdot B} : f \in J\} = L^2$ (nach Lemma)
$\Rightarrow \mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$, d.h. H in (6.3) existiert stets.

(iv) Eindeutigkeit: folgt aus (6.4).

$\square$

Satz 6.3.4 (Itô). *Jedes lokale $(\mathcal{F}_t)$-Martingal M besitzt eine stetige Version mit der Darstellung*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+)$$

mit eindeutig bestimmtem, vorhersagbarem $H = L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \Omega, Pred, \lambda \otimes \mathbf{P})$ und konstantem M_0.
Für stetiges M gilt:

$$H_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle M, B \rangle_t \quad (\textit{Radon-Nikodym-Ableitung}),$$

wobei $\langle M, B \rangle_t = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}s$ ist.

Beweis. O.E. sei M stets rechtsstetig und $M_0 = 0$.

(i) Sei zunächst M ein L^2-beschränktes Martingal
Dann gibt es - nach dem Martingalkonvergenzsatz 2.4 - ein $M_\infty \in L^2$ und - nach

Proposition 6.3.3 - ein $H \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathrm{Pred}, \lambda \otimes \mathbf{P})$ mit:

$$\begin{aligned}
M_t = \mathbf{E}(M_\infty|\mathcal{F}_t) &= \mathbf{E}(M_\infty) + \mathbf{E}\left(\int\limits_0^\infty H_s \, \mathrm{d}B_s \middle| \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbf{E}(M_\infty) + \int\limits_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s + \mathbf{E}\left[\underbrace{\int\limits_t^\infty H_s \, \mathrm{d}B_s \middle| \mathcal{F}_t}_{=0, \text{ da } \int_t^\infty H_s \, \mathrm{d}B_s \text{ unabh. von } \mathcal{F}_t}\right] \\
&= \mathbf{E}(M_\infty) + \int\limits_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung (insbesondere M stetig).

(ii) Sei nun M ein gleichgradig integrierbares Martingal. Es gibt also ein $M_\infty \in L^1$. Da L^2 dicht in L^1, gilt:
$\exists$ Folge $(M^n)_n$ von L^2-beschränkten Martingalen mit $\mathbf{E}\left[\left|M_\infty - M^{(n)}\right|\right] \to 0$ (bzw. $\exists$ Folge (M^n_∞) in L^2: $\mathbf{E}\left[\left|M_\infty - M^{(n)}_\infty\right|\right] \to 0$).
Aufgrund der Doobschen Maximal-Ungleichung

$$\mathbf{P}\left(\sup_t |M_t - M^n_t| > \lambda_n\right) \leq \frac{1}{\lambda_n} \mathbf{E}\left(|M_\infty - M^n_\infty|\right), \lambda_n \to 0$$

und wegen Borel-Cantelli ($\sum \mathbf{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$), gibt es eine Teilfolge (M^{n_k}), die f.s. gleichmäßig gegen M konvergiert
Daraus folgt M ist f.s. stetig!

(iii) Sei nun M ein beliebiges rechtsstetiges lokales Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)$.
$\Rightarrow \exists$ Stoppzeiten T_n mit M^{T_n} rechtsstetiges Martingal
$\Rightarrow M^{T_n \wedge n}$ gleichgradig integrierbares, rechtsstetiges Martingal $\Rightarrow$ f.s. stetig
$\Rightarrow M$ f.s. stetig.

Wähle nun $T_n = \inf\{t > 0 : |M_t| > n\}$, dann ist M^{T_n} beschränkt und nach nach Teil (i) folgt: $\forall n : \exists!\ H^n \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathrm{Pred}, \lambda \otimes \mathbf{P})$:

$$\begin{aligned}
M^{T_n} &= H^n \bullet B \\
\forall m \geq n : \quad (M^{T_m})^{T_n} &= (H^m \bullet B)^{T_n} = (H^m \mathbb{1}_{[0,T_n]}) \bullet B
\end{aligned}$$

$\Rightarrow H^n = \mathbb{1}_{[0,T_n]} H^m$
$\Rightarrow \exists\ H \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathrm{Pred}, \lambda \otimes \mathbf{P})$ mit $H^n = \mathbb{1}_{[0,T_n]} H \quad (\forall n)$
und $M = H \bullet B$.

$\square$

Korollar 6.3.5. *Sei B eine d-dimensionale stand. BB und $(\mathcal{F}_t)_t$ die davon erzeugte minimale Filtration, die den üblichen Bedingungen genügt. Dann gilt:*
$\forall$ lokale Martingale M bzgl. $(\mathcal{F}_t)$: $\exists$ stetige Version und $\exists H_t^i \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \Omega, Pred, \lambda^1 \otimes P), i = 1, \ldots, d$, und eine Konstante C, so daß

$$M_t = C + \sum_{i=1}^{d} H_t^i \bullet B_t^i = C + (H \bullet B)_t$$

Beweis-Idee: O.B.d.A. $M_0 = 0$.
Sei $\mathcal{F}^i$ die von (B_t^i) erzeugte Filtration mit den üblichen Bedingungen, dann

$$\begin{aligned} M_t^i := \mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_t^i) \quad &\Rightarrow \quad M_t^i \text{ Martingal bzgl. } (\mathcal{F}_t^i) \\ &\Rightarrow \quad \exists H_t^i : M_t^i = H_t^i \bullet B_t^i \end{aligned}$$

Ferner

$$\begin{aligned} (B^i) \text{ unabhängig} \quad &\Rightarrow \quad (\mathcal{F}^i) \text{ unabhängig} \\ &\Rightarrow \quad M_t = \mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_t) = \sum_{i=1}^{d} \mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_t^i) = \sum_{i=1}^{d} M_t^i \end{aligned}$$

Bemerkung 6.3.6. Offensichtlich

$$\langle M, B^i \rangle_t = \left\langle \sum_j H^j \bullet B^j, B^i \right\rangle_t = \sum_j \left(H^j \bullet \langle B^j, B^i \rangle \right)_t = \int_0^t H^i(s) \,\mathrm{d}s$$

und damit $H^i(t) = \frac{\mathrm{d}\langle M, B^i \rangle_t}{\mathrm{d}t}$ (Radon-Nikodym).

6.4 Der Satz von Girsanov

Im folgenden sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein $(\mathcal{F}_t)$-filtrierter W-Raum mit den üblichen Bedingungen und $(W_t)_{t \geq 0} = (W_t^1, \ldots, W_t^N)$ sei eine N-dimensionale Standard-Brown'sche Bewegung. Ferner sei $Z \in \mathcal{M}$ und $Z \geq 0$, d.h. wirklich ein Martingal (s. Abschnitt 6.5) mit

$$\mathbf{E}(Z_T) = 1, \quad \forall 0 \leq T < \infty.$$

Definition 6.4.1. $\forall t \in [0, \infty[$ *definiere W-Maß $\mathbf{Q}_t = Z_t \mathbf{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_t)$, d.h.*

$$\mathbf{Q}_t(A) = \int_A Z_t \,\mathrm{d}\mathbf{P} \quad (\forall A \in \mathcal{F}_t).$$

Wegen $Z \in \mathcal{M}$ gilt für alle $0 \leq S < T < \infty$: $\mathbf{Q}_S = \mathbf{Q}_T$ auf $\mathcal{F}_S$ ("Konsistenz").

Achtung: i.A. existiert kein Maß $\mathbf{Q}$ auf $\mathcal{F}_\infty$ mit $\mathbf{Q}_S = \mathbf{Q}$ auf $\mathcal{F}_S \quad (\forall S)$.

Lemma 6.4.2. *Für alle $Z > 0, Z \in \mathcal{M}_*^{loc}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $L \in \mathcal{M}_*^{loc}$ mit*

$$Z = \mathcal{E}^L = \exp\left(L - \frac{1}{2}\langle L\rangle\right)$$

Nämlich:

$$L_t = \log Z_0 + \int_0^t \frac{1}{Z_s}\, \mathrm{d}Z_s,$$

und somit

$$\langle L_t\rangle = \int_0^t \frac{1}{Z_s^2}\, \mathrm{d}\langle Z\rangle_s$$

Beweis. Mit der Itô-Formel folgt:

$$\begin{aligned} \log Z_t &= \overbrace{\log Z_0 + \int_0^t \frac{1}{Z_s}\, \mathrm{d}Z_s}^{=L_t} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{Z_s^2}\, \mathrm{d}\langle Z\rangle_s \\ &= L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t. \end{aligned}$$

□

Beobachtungen Sei $Z > 0$ und $\mathbf{Q} = Z\mathbf{P}$

(i) Ist S eine Semimartingal bzgl. $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ so auch bzgl. $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{Q})$ mit derselben quadratischen Variation $\langle S\rangle$.

(ii) Allerdings ändern sich die Doob-Meyer-Zerlegungen:

$$\begin{aligned} S &= M + A \quad \text{in } (\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}) \\ &= N + B \quad \text{in } (\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{Q}) \end{aligned}$$

Ziel: Berechnung von N (aus M und Z).
Annahme: $Z \in \mathcal{M}$, $T \in [0, \infty[$ fix und $\mathbf{Q}_T = Z\mathbf{P}_T$.

Lemma 6.4.3. *Sei $0 \leq s \leq t \leq T$, Y $\mathcal{F}_t$-messbar und $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_T}(|Y|) < \infty$. Dann gilt mit dem Satz von Bayes:*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_T}(Y|\mathcal{F}_s) = \frac{1}{Z_s}\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(YZ_t|\mathcal{F}_s) \quad \textit{f.s. bzgl. } \mathbf{P} \textit{ und } \mathbf{Q}_T$$

Beweis. $\forall A \in \mathcal{F}_s$:

$$\begin{aligned}\int_A \frac{1}{Z_s}\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(YZ_t|\mathcal{F}_s)\ \mathrm{d}\mathbf{Q}_T &= \int_A \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(YZ_t|\mathcal{F}_s)\ \mathrm{d}\mathbf{P} \\ &= \int_A YZ_s\ \mathrm{d}\mathbf{P} \\ &= \int_A Y\ \mathrm{d}\mathbf{Q}_T\end{aligned}$$

□

<u>Bezeichnungen:</u> $\mathcal{M}^{\mathrm{loc}}_{0,T} = \{$stetige lokale Martingale$M = (M_t)_{0\le t\le T}$ bzgl. $(\Omega, \mathcal{F}_T, P, (\mathcal{F}_t)_{0\le t<T})$ mit $M_0 = 0\}$
und $\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{loc}}_{0,T} = \{$stetige lokale Martingale$M = (M_t)_{0\le t\le T}$ bzgl. $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q_T, (\mathcal{F}_t)_{0\le t<T})$ mit $M_0 = 0\}$

Proposition 6.4.4. *Sei $M \in \mathcal{M}^{loc}_{0,T}$, dann ist $\widetilde{M}_t := M_t - \langle M, L\rangle_t \in \widetilde{M}^{loc}_{0,T}$ und $\langle \widetilde{M}\rangle = \langle M\rangle$ auf $[0,T]\times\Omega$ f.s. bzgl. $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}_T$.*

Beweis. O.B.d.A. $M, \langle M\rangle$ und $\langle L\rangle$ beschränkt (in t, ω). Dann ist auch $\widetilde{M}$ beschränkt. Mit partieller stochastischer Integration folgt:

$$Z_t\widetilde{M}_t = \int_0^t Z_u\ \mathrm{d}\widetilde{M}_u + \int_0^t \widetilde{M}_u\ \mathrm{d}Z_u$$

also ist $(Z_t\widetilde{M}_t)_{0\le t\le T}$ Martingal unter $\mathbf{P}$.
Mit dem Lemma 6.4.3 folgt: Für alle $0 \le s \le t \le T$ gilt:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_T}(\widetilde{M}_t|\mathcal{F}_s) = \frac{1}{Z_s}\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(Z_t\widetilde{M}_t|\mathcal{F}_s) = \widetilde{M}_s \quad \text{f.s.}$$

Somit ist $\widetilde{M} \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{loc}}_{0,T}$. □

Korollar 6.4.5. *Für $M, N \in \mathcal{M}^{loc}_{0,T}$ gilt $\langle \widetilde{M}, \widetilde{N}\rangle = \langle M, N\rangle$.*

Beweis.

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{M}, \widetilde{N}\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\langle \widetilde{M}+\widetilde{N}\rangle - \langle \widetilde{M}-\widetilde{N}\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\langle \widetilde{M+N}\rangle - \langle \widetilde{M-N}\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{4}\left(\langle M+N\rangle - \langle M-N\rangle\right) \\ &= \langle M, N\rangle\end{aligned}$$

□

Satz 6.4.6 (Girsanov, Cameron&Martin, Maruyama). *Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale BB und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die von (W_t) erzeugte Filtration mit den üblichen Bedingungen. Sei $(X_t)_{t\geq 0} = (X_t^1, \dots, X_t^N)_{t\geq 0} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \Omega, Pred, \lambda^1 \otimes \mathbf{P})^N$ und*
$Z_t := \mathcal{E}_t^{X\cdot W} = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N \int\limits_0^t X_s^i \,\mathrm{d}W_s^i - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|X_s\|^2 \,\mathrm{d}s\right).$
Definiere ferner $\widetilde{W}_t^i = W_t^i - \int\limits_0^t X_s^i \,\mathrm{d}s, \quad i = 1, \dots, N,\ 0 \leq t < \infty.$
Falls Z ein Martingal ist, dann ist für alle $T < \infty$ der Prozeß $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{0\leq t\leq T}$ eine N-dimensionale BB auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q_T, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T})$.

Beweis. Für alle $i = 1, \dots, N$ gilt:

$$\begin{aligned} W_t^i - \langle W^i, L\rangle_t &= W_t^i - \langle W^i, \sum_j X^j \cdot W^j\rangle_t \\ &= W_t^i - \sum_j \left(X^j \cdot \langle W^i, W^j\rangle\right)_t \\ &= W_t^i - \int\limits_0^t X_s^i \,\mathrm{d}s = \widetilde{W}_t^i \end{aligned}$$

also $\widetilde{W}^i = W^i - \langle W^i, L\rangle \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{loc}}_{0,T}$ nach Proposition 6.4.4 und ferner $\langle \widetilde{W}^i, \widetilde{W}^j\rangle_t = \langle W^i, W^j\rangle_t = \delta_{ij} \cdot t$.
Also ist $\widetilde{W}$ eine N-dimensionale BB (Satz von Lévy). $\square$

Bemerkung 6.4.7. Sei $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$, E ein polnischer Raum und $V = (V_t)_{t\geq 0}$ mit $V_t : \Omega \to E$ Projektion. Sei $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(V_s : s \leq t)$ die von V erzeugte Filtration enthalten in $\mathcal{F}_t$.
Dann gibt es ein W-Maß $\mathbf{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^0)$ mit $\forall T < \infty : \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_T$ auf $\mathcal{F}_T^0 \quad (\subset \mathcal{F}_T)$.
<u>Denn:</u> Für $I = \{t_1, \dots, t_n\}$ definiere ein W-Maß $\widehat{\mathbf{Q}}_I$ auf $(E^I, \mathcal{B}(E^I))$ durch

$$\widehat{\mathbf{Q}}_I(A) = \mathbf{Q}_T(\omega \in \Omega : (V_{t_1}(\omega), \dots, V_{t_n}(\omega)) \in A)$$

für beliebige $T \geq t_n$ und alle $A \in \mathcal{B}(E^n)$.
Dann ist $\{\widehat{\mathbf{Q}}_I, I \text{ end.} \subset \mathbb{R}_+\}$ eine projektive Familie
Es gibt demnach ein W-Maß $\widehat{\mathbf{Q}} = \widehat{\mathbf{Q}}_{\mathbb{R}_+}$ auf $(E^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(E)^{\mathbb{R}_+})$, den projektive Limes.
Also gilt für $T < \infty : \widehat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_T$ auf $(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E), \mathcal{F}_T^0)$ und $\mathbf{Q} := \widehat{\mathbf{Q}}|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,E)}$ leistet das Gewünschte.

Bemerkungen 6.4.8. (i) Das kanonische Modell ist der Wiener-Raum, dort gibt es ein $\mathbf{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^0)$.
In dieser Situation gilt:

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int\limits_0^t X_s \,\mathrm{d}s \text{ ist } N\text{-dimensionale BB auf } (\Omega, \mathcal{F}_\infty^0, \mathbf{Q}, (\mathcal{F}_t^0)_{0\leq t<\infty})$$

(ii) Warum haben wir in der allgemeinen Situation nur W-Maße $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ mit $\mathbf{Q} = Z_T\mathbf{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ für alle T betrachtet, wobei $Z \in \mathcal{M}$ und $\mathbf{E}(Z_0) = 1$?
Antwort: Da $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ gibt es ein $(\mathcal{F}_t)$-messbares Z_T, $Z_T : \mathbf{Q} = Z_T\mathbf{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$.
Wegen der Konsistenz gilt, dass $Z = (Z_T)_{T\geq 0}$ ein Martingal ist mit $\mathbf{E}(Z_0) = 1$.

(iii) Im Allgemeinen folgt aus Obigem nicht $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}^0_\infty)$ (und natürlich nicht auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$).
Bsp: Sei W eine 1-dimensionale BB, $\mathcal{F}^0_t = \mathcal{F}^W_t$, $X_t = \alpha \neq 0$ und $Z_t = e^{\alpha W_t - \frac{\alpha^2}{2}t}$ (also Z_t Martingal!)
Dann ist $\widetilde{W_t} = W_t - \alpha t$ eine 1-dimensionale BB bzgl. $\mathbf{Q}$ mit $\mathbf{Q} = Z_t\mathbf{P}$ auf $\mathcal{F}^0_t$.
Sei $A = \left\{\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} W_t = \alpha\right\}$
Dann ist $\mathbf{Q}(A) = \mathbf{Q}\left(\left\{\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\widetilde{W_t} = 0\right\}\right) = 1 \quad (\Leftarrow$ iterierter Logarithmus für $\widetilde{W_t})$
aber $\mathbf{P}(A) = 0 \quad (\Leftarrow$ iterierter Logarithmus für $W_t)$
$\Rightarrow \quad \mathbf{Q}$ ist nicht absolut stetig bzgl. $\mathbf{P}$.

(iv) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ auf $\mathcal{F}^0_\infty$.

(2) Z ist gleichgradig integrierbar.

(v) Warum läß t sich in (i) $\mathbf{Q}$ nicht zu einem W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ fortsetzen?
Hier (typischerweise): $\mathcal{F}_t = \overline{\mathcal{F}^0_{t+}}^{\mathbf{P}}$ und $\mathcal{F}_\infty = \cap \mathcal{F}_t$.
Antwort: Gegegeben sei $A \in \mathcal{F}^0_\infty$ mit $\mathbf{P}(A) = 0$ und $\mathbf{Q}(A) > 0$.
Dann sind alle $A' \subset A$ in $\mathcal{F}_\infty$
$\Rightarrow$ man setzt $\mathbf{P}(A') = 0$ aber $\mathbf{Q}(A') \neq 0$.
Dieses Problem tritt nicht auf, wenn man $\mathcal{F}^{(0)}_T$ statt $\mathcal{F}^{(0)}_\infty$ und $\mathbf{Q}_T$ statt $\mathbf{Q}$ betrachtet. Denn es gilt stets $\mathbf{Q}_T \ll \mathbf{P}$ auf $\mathcal{F}_T$.

6.5 Die Novikov-Bedingung

Wir betrachten nun wieder allgemein $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, die den üblichen Bedingungen genügt. Sei $L \in \mathcal{M}_0$ und $Z = \mathcal{E}^L = \exp\left(L - \frac{1}{2}\langle L\rangle\right)$.
Wir wissen bereits:

- $Z \in \mathcal{M}^{\text{loc}}, Z \geq 0, Z$ Supermatingal, $\mathbf{E}(Z_0) = 1$
- $(Z \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathbf{E}(Z_t) = 1 \quad \forall t)$

Satz 6.5.1 (Novikov '72). *$Z = \mathcal{E}^L$ ist ein Martingal, falls*

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\langle L\rangle_t\right)\right) < \infty \quad (\forall t)$$

Beweis. (i) Nach einer eventuellen Erweiterung von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$ existiert eine BB $B = (B_t)_{t\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P}, \mathcal{G}_t)$ mit

$$L_t = B_{\langle L\rangle_t}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir folgende Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{G}_t)$

$$S_n = \inf\{s \geq 0 : B_t - t \leq -n\}$$

Nach der Wald-Identität gilt $\mathbf{E}\left[\exp\left(B_{S_n} - \frac{1}{2}S_n\right)\right] = 1$. Also $\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}S_n\right)\right] = e^n$.

(ii) Betrachte nun die lokalen Martingale bzgl. $(\mathcal{G}_t)$

$$Y_t = \exp\left(B_t - \frac{1}{2}t\right) = \left(\mathcal{E}^B\right)_t$$

und $Y_t^n = Y_{t\wedge S_n}$.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y_t] &= \mathbf{E}[\exp(B_t - \frac{1}{2}t)] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp(x - \frac{1}{2}t) \cdot (2\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{x^2}{2t})\, \mathrm{d}x \\
&= (2\pi t)^{-1/2} \int \exp(-\frac{(x-t)^2}{2t})\, \mathrm{d}x \\
&= 1
\end{aligned}$$

Dann ist $(Y_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal und folglich auch $Y^n = (Y_t^n)_{t\geq 0}$.

(iii) Ferner ist $S_n < \infty$ f.s., also

$$\begin{aligned}
Y_\infty^n &= \lim_{t\to\infty} Y_t^n \\
&= Y_{S_n} \\
&= \exp(B_{S_n} - \frac{1}{2}S_n)
\end{aligned}$$

und $\mathbf{E}(Y_\infty^n) = \mathbf{E}[\exp(B_{S_n} - \frac{1}{2}S_n)] = 1 = \mathbf{E}(Y_0^n)$
Somit ist $(Y_t^n)_{0\leq t\leq\infty}$ ein Martingal.

(iv) Optional Sampling: $\forall$ Stoppzeiten R bzgl $(\mathcal{G}_t)$:

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(B_{S_n\wedge R} - \frac{1}{2}(S_n \wedge R)\right)\right] = 1.$$

Für fixes $t \in [0, \infty[$ wähle $R = \langle L \rangle_t$ ($\Rightarrow (\mathcal{G}_s)_{s \geq 0}$-Stoppzeit), dann

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbf{E}[\exp(B_{S_n \wedge \langle L \rangle_t} - \frac{1}{2}(S_n \wedge \langle L \rangle_t))] \\
&= \mathbf{E}[1_{\{S_n \leq \langle L \rangle_t\}} \exp(\frac{1}{2} S_n - n)] + \mathbf{E}[1_{\{S_n > \langle L \rangle_t\}} \exp(L_t - \frac{1}{2}\langle L \rangle_t)] \\
&\overset{n \to \infty}{=} 0 + \mathbf{E}[Z_t]
\end{aligned}$$

denn $\mathbf{E}[1_{\{S_n > \langle L \rangle_t\}} \exp(L_t - \frac{1}{2}\langle L \rangle_t)] \leq e^{-n \mathbf{E}[\exp(\frac{1}{2}\langle L \rangle_t)]} \to 0$

□

Beispiel 6.5.2. Ist speziell $L = X \cdot W$ mit einer d-dimensionalen BB W, so lautet die Novikov-Bedingung

$$\mathbf{E}\left[\exp \frac{1}{2} \int_0^t X_s^2 \, \mathrm{d}s\right] < \infty \quad (\forall t \geq 0)$$

Dann ist $Z = \mathcal{E}^{X \cdot W}$ ein Martingal und $\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t X_s \, \mathrm{d}s$ eine d-dimensionale BB bzgl. $\mathbf{Q} = Z_t \mathbf{P}$.
(Hierbei ist X progressiv messbar bzgl. $(\mathcal{F}_t^W)$ und damit $\widetilde{W}$ eine BB bzgl. $(\Omega, \mathcal{F}_t^W, \mathbf{Q})$).

6.6 Wiener-Raum und Cameron-Martin-Raum

Zur Vereinfachung betrachten wir nur Prozesse mit $t \in [0, 1]$.
Wiener-Raum: $\Omega = \mathcal{C}_0 = \{u \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^N) : u(0) = 0\}$ versehen mit:

(i) der Norm $\|.\|_\infty$ der gleichmäßigen Konvergenz $\quad \to$ Banach-Raum

(ii) dem Wiener-Maß $P \quad \to$ W-Raum.
Cameron-Martin-Raum: $H = \{u \in \mathcal{C}_0 : u^{(i)}$ absolut stetig $, \|u\|_H < \infty\}$ Hilbert-Raum mit Norm $\|u\|_H^2 = \int_0^1 |u'(s)|^2 \, \mathrm{d}s = \int_0^1 \sum_{i=1}^N |u^{(i)\prime}(s)|^2 \, \mathrm{d}s$, H liegt dicht in $\mathcal{C}_0$.
Der Projektionsprozeß $W = (W_t)_{0 \leq t \leq 1}$ auf dem Wiener-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ist eine stand. BB.
Für $h \in \Omega$ kann man eine Translationsabbildung τ_h in Ω definieren:

$$\begin{aligned}
\tau_h : \Omega &\to \Omega \\
u &\mapsto u + h
\end{aligned}$$

Sei $\mathbf{P}^h = \mathbf{P} \circ \tau_h^{-1}$ das Bildmaß von $\mathbf{P}$ unter τ_h und W^h der Prozeß definiert durch $W_t^h(u) = W_t(u) - h(t)$.
$W^h = W \circ \tau_h^{-1} = W \circ \tau_{-h}$.

Dann gilt also, daß die Verteilung von W^h unter $\mathbf{P}^h$ gleich der Verteilung von W unter $\mathbf{P}$ ist. Somit ist W^h unter $\mathbf{P}^h$ eine BB.
Sei nun $h \in H$, dann ist $h' \in L^2([0,1],\mathbb{R}^N)$.
Wie definieren das Martingal $L_t^h = (h' \cdot W)_t = \sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_0^t h^{(i)\prime}(s)\ \mathrm{d}W_s^{(i)}$ und $Z_t^h = (\mathcal{E}^{L^h})_t$.
Nach Novikov ist Z^h ein Martingal mit $\mathbf{E}(Z_t^h) = 1$. Also folgt mit Grisanov, daß W^h eine BB unter $Z^h\mathbf{P}$ ist.

Satz 6.6.1. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\mathbf{P} \gg \mathbf{P}^h$ *und* $\mathbf{P} \ll \mathbf{P}^h$

(ii) $h \in H$

In diesem Fall: $\mathbf{P}^h = Z^h\mathbf{P}$.

6.7 Große Abweichungen

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, $(W_t)_{0\le t\le 1}$ und H wie zuvor.

Definition 6.7.1. *Das Wirkungsfunktional I auf Ω ist definiert durch*
$$I(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|u\|_H^2 & , u \in H \\ 0 & , u \in \Omega\backslash H \end{cases}$$
und für $A \subset \Omega : I(A) = \inf\limits_{u\in A} I(u)$.

Bemerkung 6.7.2. (i) $u \mapsto I(u)$ ist nach unten halbstetig auf Ω

(ii) $\forall\lambda \ge 0$:
$$\forall\lambda : \{u : I(u) \le \lambda\} \text{ kompakt } \subset \Omega$$

Satz 6.7.3 (Schilder '66)**.** *Für alle Borel-Mengen $A \subset \Omega$ gilt:*

$$\begin{aligned} -I(\mathring{A}) &\le \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbf{P}(\varepsilon W \in \mathcal{A}) \\ &\le \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbf{P}(\varepsilon W \in \mathcal{A}) \\ &\le -I(\overline{A}) \end{aligned}$$

<u>Anschaulich:</u>
$\mathbf{P}(\varepsilon W \in A) \sim e^{-\frac{1}{\varepsilon^2}I(A)}$, *also* $\mathbf{P}(\varepsilon W \in A) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$ *exponentiell schnell, falls* $I(A) > 0$.

7 Stochastische Differentialgleichungen

Ziel: Existenz und Eindeutigkeit für Lösungen X der SDG

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\ \mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\ \mathrm{d}W_t, \quad X_0 = \xi. \tag{7.1}$$

Hier und im Folgenden seien:
$b(t,x) = (b_i(t,x))_{i=1,\dots,d}$ Drift-Vektor,
$\sigma(t,x) = (\sigma_{ij}(t,x))_{i=1,\dots,d;j=1,\dots,n}$ Dispersionsmatrix,
$a(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^T(t,x) = (a_{ik}(t,x))_{i=1,\dots,d;k=1,\dots,d}$ Diffusionsmatrix,

(W_t) Brown'sche Bewegung in $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}, \xi$ zufälliger Vektor in $\mathbb{R}^d$ und (X_t) ein $\mathbb{R}^d$-dimensionales Semimartingal;
das heißt: $a_{ik}(t,x) = \sum\limits_{j=1}^{r} \sigma_{ij}(t,x)\sigma_{kj}(t,x)$.
Stets gelte für alle i, j, k:
$b_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ Borel-messbar,
$\sigma_{ij} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Borel-messbar,
$a_{ik} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Borel-messbar.

Definition 7.0.4. *Man definiere für alle $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$:*
$\|b(t,x)\| := \left(\sum\limits_{i=1}^{d} b_i^2(t,x) \right)^{\frac{1}{2}}$,
$\|\sigma(t,x)\| := \left(\sum\limits_{i=1}^{d} \sum\limits_{j=1}^{r} \sigma_{ij}^2(t,x) \right)^{\frac{1}{2}}$.

7.1 Starke Lösungen

Vorgegeben:

- W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,
- n-dim stand. BB $W = (W_t)_{t \geq 0}$ und die davon erzeugte Filtration $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$,
- von W unabhängig, $\mathbb{R}^d$-wertige ZV ξ.

Bezeichne dann mit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die folgende den üblichen Bedingungen genügende Filtration:
Für $t \geq 0$:
$\mathcal{F}_t :=$ Augmentierung von $\sigma(\xi, W_s : s \leq t) := \sigma(\xi) \vee \mathcal{F}_t{}^W$.

Definition 7.1.1. *Eine* starke Lösung *der SDG* (7.1) *ist ein auf* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *definierter* $\mathbb{R}^d$*-wertiger Prozess* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *mit*

(i) X *ist an* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *adaptiert.*

(ii) $X_0 = \xi \quad \mathbf{P}$*-f.s.*

(iii) X *ist stetiges Semimartingal mit* $\forall t < \infty$*:*

$$\int_0^t \|b(s, X_s)\| + \|\sigma(s, X_s)\|^2 \, \mathrm{d}s < \infty \quad \mathbf{P}\text{-f.s.}$$

(iv) X *löst die stoch. Integralgleichung*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) \, \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s) \, \mathrm{d}W_s, \tag{7.2}$$

$0 \leq t \leq +\infty$, $\mathbf{P}$*-f.s., d.h. koordinatenweise* $\forall i = 1, \ldots, d$*:*

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t b_i(s, X_s) \, \mathrm{d}s + \sum_{j=1}^r \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s) \, \mathrm{d}W_s^{(j)},$$

$0 \leq t \leq +\infty$, $\mathbf{P}$*-f.s.*

Bemerkung 7.1.2. (iv) entspricht der SDG, (ii) ist die Anfangsbedingung, (iii) ist technische Vorraussetzung damit (iv) formuliert werden kann, (i) bedeutet: X_t ist (im Wesentlichen) Funktion von ξ und $\{W_s : 0 \leq s \leq t\}$. Dies bezeichnet man als „Kausalitätsprinzip“: Output zur Zeit t hängt nur ab vom Input bis zur Zeit t.

Definition 7.1.3. *Für SDGen zum Paar* (b, σ) *gilt* starke Eindeutigkeit, *falls Folgendes gilt:*
Sind X *und* $\widetilde{X}$ *zwei starke Lösungen von* (7.1) *auf einem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, zu einer BB* W *und einer Startvariable* ξ*, so sind* X *und* $\widetilde{X}$ *ununterscheidbar, d.h.* $\mathbf{P}(X_t = \widetilde{X}_t \quad \forall t \geq 0) = 1$.

Beispiel 7.1.4. $\sigma = 0$, $b(t, x) = |x|^\alpha$: Damit ist (7.1) eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung.
Anfangsbedingung: $X_0 = 0$.
Falls $\alpha \geq 1$: Eindeutigkeit gilt: $X_t \equiv 0$.
Falls $0 < \alpha < 1$: keine Eindeutigkeit: $\forall T \in [0, \infty]$ $\exists$ Lsg. $X := X^T$ mit

$$X_t := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ [(1-\alpha)(t-T)]^{1/1-\alpha} & \text{für } T \leq t \leq \infty \end{cases}.$$

Satz 7.1.5 (Eindeutigkeit)**.** *Sind* b *und* σ *lokal Lipschitz-stetig in* x*, so gilt starke Eindeutigkeit für SDGl zum Paar* (b, σ).

Bemerkung 7.1.6. Die Voraussetzung lautet explizit:
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists K_n < \infty$ sodass $\forall t \geq 0$ und $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| \leq n, \|y\| \leq n$ gilt:

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K_n \cdot \|x - y\|.$$

Lemma 7.1.7 (Gronwall)**.** *Seien $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig und $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $\beta \geq 0$.*
Aus

$$0 \leq g(t) \leq h(t) + \beta \int_0^t g(s)\ \mathrm{d}s \quad (\forall t \in [0,T])$$

folgt

$$g(t) \leq h(t) + \beta \int_0^t h(s) e^{\beta(t-s)}\ \mathrm{d}s \quad (\forall t \in [0,T])$$

und falls h isoton ist, folgt

$$g(t) \leq h(t) e^{\beta t}.$$

Beweis. Aus Voraussetzung folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\beta t} \int_0^t g(s)\ \mathrm{d}s\right) = \left(g(t) - \beta \int_0^t g(s)\ \mathrm{d}s\right) e^{-\beta t} \leq h(t) e^{-\beta t}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^t g(s)\ \mathrm{d}s \leq e^{\beta t} \int_0^t h(s) e^{-\beta s}\ \mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow \quad g(t) \overset{\text{Vor.}}{\leq} h(t) + \beta \int_0^t g(s)\ \mathrm{d}s \leq h(t) + \beta \int_0^t h(s) e^{\beta(t-s)}\ \mathrm{d}s$$

□

Bemerkung 7.1.8. Falls $g(t) \leq \beta \int g(s)\ \mathrm{d}s$, so ist bereits $g \equiv 0$.

Beweis von Satz (7.1.5). Gegeben seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $W = (W_t)_{t \geq 0}$, ξ, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ und zwei starke Lsg. $X, \widetilde{X}$ von (7.1).

Definiere Stoppzeiten $\tau_k, \widetilde{\tau}_k, S_k$ durch $\overset{(\sim)}{\tau_k} := \inf\left\{t \geq 0 : \left\|\overset{(\sim)}{X_t}\right\| \geq k\right\}$ und $S_k := \tau_k \wedge \widetilde{\tau}_k$.

Dann gilt: $S_k \nearrow \infty$ $\mathbf{P}$-f.s. und

$$\begin{aligned} &X_{t \wedge S_k} - \widetilde{X}_{t \wedge S_k} \\ &\quad = \int_0^{t \wedge S_k} \left[b(u, X_u) - b(u, \widetilde{X}_u)\right]\ \mathrm{d}u + \int_0^{t \wedge S_k} \left[\sigma(u, X_u) - \sigma(u, \widetilde{X}_u)\right]\ \mathrm{d}W_u. \end{aligned}$$

Dies impliziert für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
g(t) = \mathbf{E}\left[\left\|X_{t\wedge S_k} - \widetilde{X}_{t\wedge S_k}\right\|^2\right] \quad &= \quad \sum_{i=1}^{d} \mathbf{E}\left(\left\{ \int_0^{t\wedge S_k} \left[b_i(u,X_u) - b_i(u,\widetilde{X}_u)\right]\,\mathrm{d}u \right.\right. \\
&+ \quad \left.\left. \sum_{j=1}^{n} \int_0^{t\wedge S_k} \left[\sigma_{ij}(u,X_u) - \sigma_{ij}(u,\widetilde{X}_u)\right]\,\mathrm{d}W_u^{(j)} \right\}^2\right) \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz-Ungl.}}{\underset{\text{Itô-Isometrie}}{\leq}} \quad 2t\cdot\mathbf{E}\left(\int_0^{t\wedge S_k} \underbrace{\|b(u,X_u) - b(u,\widetilde{X}_u)\|}_{\leq K_n\cdot\|X_u - \widetilde{X}_u\|}{}^2\,\mathrm{d}u\right) \\
&+ \quad 2\mathbf{E}\left(\int_0^{t\wedge S_k} \underbrace{\|\sigma(u,X_u) - \sigma(u,\widetilde{X}_u)\|}_{\leq K_n\cdot\|X_u - \widetilde{X}_u\|}{}^2\,\mathrm{d}u\right) \\
&\leq \quad \underbrace{2(T+1)\cdot K_n^2}_{=:\beta}\cdot\int_0^t \underbrace{\mathbf{E}\left(\|X_{u\wedge S_k} - \widetilde{X}_{u\wedge S_n}\|^2\right)}_{=:g(u)} du
\end{aligned}$$

Aus dem Gronwall-Lemma folgt nun die Gleichheit:

$$\mathbf{E}\left(\|X_{t\wedge S_k} - \widetilde{X}_{t\wedge S_k}\|^2\right) = 0 \quad (\forall t \leq T, \forall k)$$

$\Rightarrow X^{S_k}, \widetilde{X}^{S_k}$ sind ununterscheidbar $(\forall k)$
$\Rightarrow X, \widetilde{X}$ sind ununterscheidbar. $\square$

Bemerkung 7.1.9. Aus lokaler Lipschitz-Stetigkeit folgt nicht globale Existenz.

Beispiel 7.1.10. $\sigma \equiv 0$, $b(t,x) = \| x \|^2$, $X_0 = 1$
$\Rightarrow X_t = \frac{1}{1-t}$ für $t \in [0,1[$ ist Lsg. der zugehörigen DGL, Explosion für $t \to 1$.

Im Folgenden seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), W = (W_t), \xi, (\mathcal{F}_t)$ gegeben.

Satz 7.1.11 (Existenz). *Sei $\mathbf{E}(\|\xi\|^2) < \infty$. Es existiere eine Konstante $K > 0$, so dass für alle t, x, y gelte:*

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K \cdot \|x - y\|$$

("globale Lipschitz-Bedingung") und

$$\|b(t,x)\| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1 + \|x\|)$$

("lineare Wachstumsbedingung").
Dann existiert eine starke Lsg. X der SDG (7.1)*.*
Ferner gilt: $\forall T\ \exists C\ \forall 0 \le t \le T$*:*

$$\mathbf{E}(\|X_t\|^2) \le C \cdot (1 + \mathbf{E}(\|\xi\|^2)).$$

Beweis. (i) Idee: Picard-Lindelöf-Iteration, d.h. def. $X_t^{(0)} = \xi$,
$X_t^{(k+1)} = \xi + \int\limits_0^t b(s, X_s^{(k)})\ \mathrm{d}s + \int\limits_0^t \sigma(s, X_s^{(k)})\ \mathrm{d}W_s$
$X_0^{(k)} = \xi$ $\mathbf{P}$-f.s.
Durch Induktion beweisen wir nun, dass $X^{(k)}$ wohldefiniert, stetig und an $(\mathcal{F}_t)$ adaptiert ist:
Induktionsanfang: Für $k = 0$ stimmt diese Aussage.
Induktionsschritt: Aus der Induktionsannahme und der linearen Wachstumsbedingung folgt:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t (\|b(s, X_s^{(k)})\| + \|\sigma(s, X_s^{(k)})\|^2) ds \\
\le\ & \int_0^t K(1 + \|X_s^{(k)}\|)\ \mathrm{d}s + \int_0^t K^2(1 + \|X_s^(k)\|)^2\ \mathrm{d}s \\
=\ & 2K^2(T+1) \int_0^t (1 + \|X_s^{(k)}\|)^2 ds
\end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von $X^{(k)}$ (Induktionsannahme) folgt nun:

$$\int_0^t (\|b(s, X_s^{(k)})\| + \|\sigma(s, X_s^{(k)})\|^2) ds < \infty \quad P\text{-f.s.}$$

$\Rightarrow X^{(k+1)}$ wohldefiniert, stetig, adaptiert

(ii) $\forall T\ \exists C = C_{KT}\ \forall t \le T, \forall k$:

$$\mathbf{E}(\|X_t^{(k)}\|^2) \le C(1 + \mathbf{E}(\|\xi\|^2)). \tag{7.3}$$

Denn: Für $k = 0$ und alle t gilt:

$$\mathbf{E}(\|X_t^{(0)}\|^2) = \mathbf{E}(\|\xi\|^2) \le 1 + \mathbf{E}(\|\xi\|^2).$$

Für $k \geq 1$ und alle $t \leq T$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\|X_t^{(k+1)}\|^2) &\leq 3\mathbf{E}(\|\xi\|^2) + 3t \cdot \int_0^t \mathbf{E}\left(\|b(u, X_u^{(k)})\|^2\right) \,\mathrm{d}u + 3 \cdot \int_0^t \mathbf{E}\left(\|\sigma(u, X_u^{(k)})\|^2\right) \,\mathrm{d}u \\
&\leq 3\mathbf{E}(\|\xi\|^2) + 3(T+1)K^2 \int_0^t \mathbf{E}\left(\|X_u^{(k)}\|^2\right) \,\mathrm{d}u + 3(T+1)K^2 T.
\end{aligned}$$

Es existiert also eine Konstante $C_0 = C_0(K, T) \geq 1$, so dass für alle $t \leq T$ und alle $k \geq 1$ die folgende Iterationsformel gilt:

$$\mathbf{E}(\|X_t^{(k+1)}\|^2) \leq C_0(1 + \mathbf{E}(\|\xi\|^2)) + C_0 \int_0^t \mathbf{E}(\|X_u^{(k)}\|^2) \,\mathrm{d}u.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbf{E}(\|X_t^{(k+1)}\|^2) &\leq C_0(1 + \mathbf{E}(\|\xi\|^2)) \left(1 + C_0 t + \frac{(C_0 t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(C_0 t)^{k+1}}{(k+1)!}\right) \\
&\leq C_0 \cdot e^{C_0 T}(1 + \mathbf{E}(\|\xi\|^2)) \\
&= C \cdot (1 + \mathbf{E}(\|\xi\|^2))
\end{aligned}$$

mit $C := C_{KT} := C_0 e^{C_0 T}$.

(iii) Nach Konstruktion gilt (für fixes $k \in \mathbb{N}$): $X^{(k+1)} - X^{(k)} = B + M$ mit

$$B_t = \int_0^t [b(s, X_s^{(k)}) - b(s, X_s^{(k-1)})] \,\mathrm{d}s$$

$$M_t = \int_0^t [\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s^{(k-1)})] \,\mathrm{d}W_s$$

Aufgrund der linearen Wachstumsbedingung und der Abschätzung aus dem Abschnitt (i) ist $M = (M^{(1)}, \ldots, M^{(d)}) \in (\mathcal{M}_0)^d$ mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq t} \|M_s\|^2\right] &\underset{\text{Itô-Isometrie}}{\overset{\text{Maximal-Ungl.}}{\leq}} C_1 \cdot \mathbf{E}\left[\int_0^t \|\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s^{(k-1)})\|^2 \,\mathrm{d}s\right] \\
&\leq C_1 \cdot K^2 \cdot \mathbf{E}\left[\int_0^t \|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2 \,\mathrm{d}s\right]
\end{aligned}$$

wegen Lipschitz-Stetigkeit (mit einer geeigneten Konstanten $C_1 > 0$).

Ferner gilt: $\|B_t\|^2 \leq K^2 T \int_0^t \|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2 \,\mathrm{d}s$.

$\Rightarrow \mathbf{E}\left[\sup\limits_{0\le s\le t}\|B_s\|^2\right] \le K^2\cdot T\cdot \mathbf{E}\left[\int\limits_0^t \|X_s^{(k)}-X_s^{(k-1)}\|^2\ \mathrm{d}s\right].$
Dies impliziert:

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\|X_s^{(k+1)}-X_s^{(k)}\|^2\right] \le C_2\int\limits_0^t \mathbf{E}\left[\|X_s^{(k)}-X_s^{(k-1)}\|^2\right]\ \mathrm{d}s \tag{7.4}$$

Iteration ergibt: $\forall k\in\mathbb{N}, \forall t\in[0,T]$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\|X_s^{(k+1)}-X_s^{(k)}\|^2\right] &\le \frac{(C_2t)^k}{k!}\cdot\underbrace{\underbrace{\mathbf{E}\left[\int\limits_0^t \|X_s^{(1)}-\xi\|^2\ \mathrm{d}s\right]}_{2\mathbf{E}[\|X_s\|^2]+2\mathbf{E}[\|\xi\|^2]}}_{<\infty}\\ &\le \frac{(C_2t)^k}{k!}\cdot C_3<\infty \end{aligned}\tag{7.5}$$

mit $C_3=\sup\limits_{0\le s\le T}\mathbf{E}\left[|X_s^{(1)}-\xi|^2\right]<\infty$ und $C_2=4(C_1+T)K^2$.

(iv) Aus (7.5) und der Chebyshev-Ungleichung folgt für alle $k\in\mathbb{N}$:

$$\mathbf{P}\left[\sup_{0\le s\le T}\|X_s^{(k+1)}-X_s^{(k)}\|\ge\frac{1}{2^{k+1}}\right]\le 4C_3\cdot\frac{(4C_2T)^k}{k!} \tag{7.6}$$

Dabei gilt: Die Summe über die rechte Seite von (7.6) ist konvergent in k. Also folgt mit dem Lemma von Borel-Cantelli:

$$\mathbf{P}\left[\sup_{0\le s\le T}\|X_s^{(k+1)}-X_s^{(k)}\|\ge\frac{1}{2^{k+1}}\text{ für unendlich viele }k\in\mathbb{N}\right]=0$$

Es existiert also ein stetiger Prozess $X=(X_s)_{0\le s\le T}$, so dass **P**-f.s. gilt:
$X^{(k)}\to X$ in Sup-Norm auf $[0,T]$
Damit existiert ein stetiger Prozess $X=(X_s)_{0\le s\le T}$ mit der Eigenschaft:
$X^{(k)}\to X$ glm. auf $[0,T]$ **P**-f.s.
Aus dem Lemma von Fatou folgt: $\forall t\in[0,T]$:

$$\mathbf{E}(\|X_t\|^2)\le C(1+\mathbf{E}[\|\xi\|^2])\quad\text{ mit } C=C(T,K) \tag{7.7}$$

(v) Behauptung: X löst SDG (7.1).
Denn: Nach Konstruktion gilt: $X_t=\lim\limits_{k\to\infty}X_t^{(k)}$ mit

$$X_t^{(k+1)}=\xi+\int\limits_0^t b(s,X_s^{(k)})\ \mathrm{d}s+\int\limits_0^t\sigma(s,X_s^{(k)})\ \mathrm{d}W_s \qquad (*)$$

Für fixiertes T gilt: Für $\mathbf{P}$-fast alle $\omega \in \Omega$ existiert ein $N := N(\omega) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\forall k \geq N(\omega)$ gilt: $\sup\limits_{0 \leq s \leq T} \|X_s(\omega) - X_s^{(k)}(\omega)\| \leq 2^{-k}$.
Die globale Lipschitz-Bedingung impliziert:

$$\left\| \int\limits_0^t b(s, X_s) ds - \int\limits_0^t b(s, X_s^{(k)}) \, \mathrm{d}s \right\|^2 \leq K^2 T \int\limits_0^T \|X_s - X_s^{(k)}\|^2 \, \mathrm{d}s \to 0$$

für $k \to \infty$ $\mathbf{P}$-f.s..
Nun zum stoch. Integral: Aus (7.5) folgt $\forall t \in [0, T]$:

$$(X_t^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge in } L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}).$$

Aus der $\mathbf{P}$-fast sicheren Konvergenz $X_t^{(k)} \to X_t$ folgt $X_t^{(k)} \to X_t$ in L^2.
Ferner: $\sup\limits_{0 \leq t \leq T, k \in \mathbb{N}} \mathbf{E}\left[\|X_t^{(k)}\|^2\right] < \infty$.
Mit dem Lemma von Fatou folgt daraus: $\sup\limits_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E}\left[\|X_t\|^2\right] < \infty$
Damit gilt schließlich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\left\| \int\limits_0^t \sigma(s, X_s) \, \mathrm{d}W_s - \int\limits_0^t \sigma(s, X_s^{(k)}) \, \mathrm{d}W_s \right\|^2\right] &= \\
&= \mathbf{E}\left[\int\limits_0^t \left\|\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^{(k)})\right\|^2 \, \mathrm{d}s\right] \\
&\leq K^2 \cdot \mathbf{E}\left[\int\limits_0^t \|X_s - X_s^{(k)}\|^2 \, \mathrm{d}s\right] \to 0 \quad (k \to \infty)
\end{aligned}$$

wegen L^2-Beschränktheit (auf $[0, T] \times \Omega$) und punktweiser Konvergenz.
Zusammen erhält man mit $(*)$:

$$\begin{aligned}
X_t^{(k+1)} &= \xi + \int_0^t b(s, X_s^{(k)}) \, \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(k)}) \, \mathrm{d}W_s \\
&\longrightarrow \xi + \int_0^t b(s, X_s) \, \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s) \, \mathrm{d}W_s = X_t.
\end{aligned}$$

□

Korollar 7.1.12 (Verallgemeinerung)**.** *Voraussetzungen an b, σ wie zuvor (global Lipschitz, lin. Wachstum), keine Einschränkung an ξ. Dann existiert eine eindeutig bestimmte starke Lösung.*

Beweis. Idee: $\forall k \in \mathbb{N}$ sei $\xi_k := \xi 1_{\{|\xi| \le k\}}$ und $X^{(k)}$ die eindeutige starke Lösung zur Anfangsbedingung ξ_k.
Dann folgt für alle T und alle $l > k$:

$$\sup_{0 \le s \le T} \|X_s^{(l)} - X_s^{(k)}\| = 0 \quad \mathbf{P}\text{-f.s auf } \{\omega : |\xi(\omega)| \le k\}$$

Also existiert ein Prozess X mit $X = \lim\limits_{k \to \infty} X^{(k)}$. □

7.2 Beispiele

(i) BB mit Drift: $d = r, v \in \mathbb{R}^d, \sigma > 0$
$\mathrm{d}X_t = v \; \mathrm{d}t + \sigma \; \mathrm{d}W_t$,
<u>Lösung</u>: $X_t = X_0 + vt + \sigma W_t \Rightarrow \mathbf{E}(X_t) = \mathbf{E}(X_0) + vt$
Allgemein: d, r bel., $v \in \mathbb{R}^d, \sigma \in R^{d \times r}, W_t = r$-dim BB
$\mathrm{d}X_t = v \; \mathrm{d}t + \sigma \; \mathrm{d}W_t$,
$X_t = X_0 + vt + \sigma W_t$
$\mathbf{E}(X_t) = \mathbf{E}(X_0) + vt$
Falls X_0 konstant ist, gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_t^i, X_t^j) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_k \sigma_{ik} W_t^k, \sum_l \sigma_{jl} W_t^l \right) \\ &= \sum_{k=1}^{r} \sigma_{ik} \cdot \sigma_{jk} \cdot t \quad (i, j = 1, \ldots, d) \\ &= a_{ij} \cdot t \quad \text{ mit } a = \sigma\sigma^T \end{aligned}$$

(ii) Ornstein-Uhlenbeck-Prozess: $d = r, \alpha > 0$

$$\mathrm{d}X_t = -\alpha X_t \; \mathrm{d}t + \; \mathrm{d}W_t$$

Langevin 1908: X_t ist Geschwindigkeit(!) eines Moleküls unter Berücksichtigung von Reibung
<u>Lösung</u>: $X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)} \; \mathrm{d}W_s$
Falls X_0 Gauß-verteilt, $\mathbf{E}(X_0) = 0, \mathrm{Var}(X_0) = \frac{1}{2\alpha}$, so ist auch X_t Gauß-verteilt, $\mathbf{E}(X_t) = 0, \mathrm{Var}(X_t) = \frac{1}{2\alpha}$ und $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t-s|}$.
<u>Interpretation</u>: Die Drift $b(t, x) = -\alpha x$ in Richtung des Ursprungs $0 \in \mathbb{R}^d$ bewirkt, dass X stationär ist (d.h. Vert. ist unabh. von t), in dem Sinne:

$$\mathbf{E}(X_t) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$
$$\mathbf{E}(X_t^2) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\alpha} = \text{const.}$$

Im Gegensatz hierzu gilt für freie BB ($\alpha = 0$):

$$\mathbf{E}(X_t^2) = d \cdot t,$$

d.h. X breitet sich im Laufe der Zeit immer mehr im Raum aus.

(iii) Brownsche Brücke: $a, b \in \mathbb{R}^d, d = r, 0 \leq t < T$

$$\mathrm{d}X_t = \frac{b - X_t}{T - t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \quad X_0 = a$$

<u>Lösung</u>:

$$X_t = a + \frac{t}{T}(b-a) + (T-t)\int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}W_s}{T-s}, \quad 0 \leq t < T.$$

Setze $X_T = b$.
$X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ ist Gauß-Prozess mit f.s. stetigen Pfaden und
$\mathbf{E}(X_t) = a + \frac{t}{T}(b-a)$ sowie $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = s \wedge t - \frac{st}{T}$.
<u>Interpretation</u>: Die Drift $b(t,x) = \frac{b-x}{T-t}$ in Richtung b (mit Stärke $\to \infty$ für $t \to T$) treibt den Prozess nach b.

(iv) Bessel-Prozess: $d = r = 1$, $a \in \mathbb{R}_+$, $N \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{d}X_t = \frac{N-1}{2X_t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \quad X_0 = a$$

Die Drift $b(t,x) = \frac{N-1}{2x}$ drängt den Prozess X vom Ursprung $0 \in \mathbb{R}$ weg. Für $N \geq 2$ ist die Drift stark genug, um zu gewährleisten, dass $X_t > 0$ $\mathbf{P}$-f.s., falls $X_0 \geq 0$.

(v) Geometrische BB:

$$\mathrm{d}X_t = \alpha X_t\,\mathrm{d}W_t, \quad X_0 = \xi > 0.$$

<u>Lösung</u>: $X_t = \xi\varepsilon_t^{\alpha W} = \xi\exp(\alpha W_t - \frac{1}{2}|\alpha|^2 t)$.
<u>Dispersion proportional zur Auslenkung</u>. Für $X \to 0$ ist Dispersion $\to 0$, keine Bewegung, Null wird nie erreicht.

(vi) Lineare Gleichungen: $b(t,x) = A(t)x + a(t)$, $\sigma(t,x) = S(t)x + \sigma(t)$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= [A(t)X_t + a(t)]\,\mathrm{d}t + [S(t)X_t + \sigma(t)]\,\mathrm{d}W_t \\ &= X_t\,\mathrm{d}Y_t + \mathrm{d}Z_t, \quad X_0 = \xi, \end{aligned} \tag{7.8}$$

mit $Y_t = \int\limits_0^t A(s)\,\mathrm{d}s + \int\limits_0^t S(s)\,\mathrm{d}W_s$ und $Z_t = \int\limits_0^t a(s)\,\mathrm{d}s + \int\limits_0^t \sigma(s)\,\mathrm{d}W_s$.
Hierbei $W = r$-dim BB, s, S, σ messbar, beschränkt in t, $A(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}, a(z) \in \mathbb{R}^d$,

$S(t) \in \mathbb{R}^{d \times d \times r}$, $\sigma(t) \in \mathbb{R}^{d \times r}$,
$X = d$-dim stet. Semimartingal,
$Y = d$-dim stet. Semimartingal,
$Z = d$-dim stet. Semimartingal.

Proposition 7.2.1. (i) (7.8) *hat eine eindeutig bestimmte starke Lsg.*

(ii) *Im Falle $d = 1$ ist die Lsg. durch*

$$X_t = \mathcal{E}_t^Y \left(\xi + \int_0^t (\mathcal{E}_s^Y)^{-1} (\, \mathrm{d}Z_s - S(s)\sigma^T(s)\, \mathrm{d}s) \right)$$

gegeben, wobei $\mathcal{E}_t^Y := \exp\left(\int_0^t S(s)\, \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2} \int_0^t S(s)S^T(s)\, \mathrm{d}s + \int_0^t A(s)\, \mathrm{d}s \right)$.

Beweis. (i) Vorheriger Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

(ii) Nach der Itô-Formel und partieller stochastischer Integration gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^t X_s\, \mathrm{d}Y_s &= \xi \int_0^t \mathcal{E}_s^Y\, \mathrm{d}Y_s + \int_0^t \mathcal{E}_s^Y \int_0^s (\mathcal{E}_r^Y)^{-1} (\, \mathrm{d}Z_r - \, \mathrm{d}\langle Z, Y\rangle_s) \\
&= -\xi + \xi \mathcal{E}_t^Y + \mathcal{E}_t^Y \int_0^t (\mathcal{E}_r^Y)^{-1} (\, \mathrm{d}Z_r - \, \mathrm{d}\langle Z, Y\rangle_r) \\
&- \int_0^t \mathcal{E}_r^Y (\mathcal{E}_r^Y)^{-1} (\, \mathrm{d}Z_r - \, \mathrm{d}\langle Z, Y\rangle_r) \\
&- \langle \mathcal{E}_s^Y, \int_0^t (\mathcal{E}_r^Y)^{-1} (\, \mathrm{d}Z_r - \, \mathrm{d}\langle Z, Y\rangle_r)\rangle_t \\
&= -\xi - Z_t + X_t + \langle Z, Y\rangle_t - \int_0^t \mathcal{E}_r^Y (\mathcal{E}_r^Y)^{-1}\, \mathrm{d}\langle Z, Y\rangle_r \\
&= -\xi - Z_t + X_t.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.2.2. (i) Sei $d = 1$ und $S \equiv 0$, d.h.

$$\mathrm{d}X_t = A(t)X_t\, \mathrm{d}t + a(t)\, \mathrm{d}t + \sigma(t)\, \mathrm{d}W_t.$$

Dann ist
$$X_t = \phi_t \left[X_0 + \int\limits_s^{-1} (a(s)\ \mathrm{d}s + \sigma(s)\ \mathrm{d}W_s) \right]$$
mit $\phi_t = \exp\left(\int\limits_0^t A(s)\ \mathrm{d}s \right)$.
Für die Lsg. x_t der gewöhnl. (= nicht-stoch.) DGl $\dot{x}_t = A(t)x_t + a(t)$ gilt:
$x_t = \phi_t \cdot \left[x_0 + \int\limits_0^t \phi_s^{-1} a(s)\ \mathrm{d}s \right]$ „Variation der Konstanten“.

(ii) Dieselbe Formel gilt für allgemeines d, falls man
$$\phi_t := \exp\left(\int\limits_0^t A(s)\ \mathrm{d}s \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int\limits_0^t A(s)\ \mathrm{d}s \right)^k$$
als $d \times d$-Matrix interpretiert (s. Übung).

7.3 Lokale Lösungen, Maximallösungen

Wir wollen das Bisherige in zweifacher Hinsicht verallgemeinern:

(i) SDG mit lokal (nicht: global) Lischitz-stetigen Koeff. $\rightarrow$ Existenz der Lsg. nur für gewisse Zeit

(ii) SDG auf offenem $U \subset \mathbb{R}^d$ $\rightarrow$ Existenz der Lsg. nur für gewisse Zeit

Definition 7.3.1. *Eine Stoppzeit $\tau : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt* vorhersagbar, *falls eine Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von („ankündigenden“) Stoppzeiten τ_n mit $\tau_n \nearrow \tau$ f.s. und $\tau_n < \tau$ auf $\{0 < \tau < \infty\}$ f.s. existiert.*
Schreibweise: $\tau_n \nearrow \tau$.

Beispiel 7.3.2. X stetiger Prozess, $\mathbb{R}^d$-wertig, $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\neq \emptyset$.
Dann ist $\tau_U := \inf\{t \geq 0 : X_t \notin U\}$ („Austrittszeit aus U“) vorhersagbare Stoppzeit.
Denn: Wähle $\tau_n := \inf\{t \geq 0 :\ \mathrm{d}(X_t, \complement U) \leq \frac{1}{n}\}$. Aus $\tau_U(\omega) > 0$ folgt $X_0(\omega) \in U$ und damit $\tau_n(\omega) > 0$ für ein hinreichend großes n. Hieraus folgt wiederum $\tau_n(\omega) < \tau_{n+1}(\omega) < \cdots < \tau(\omega)$. Ferner $\sup \tau_n = \tau$.

Definition 7.3.3. *Seien $U \neq \emptyset, U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\zeta > 0$ vorhersagbare Stoppzeit. Ein Prozess $Y = (Y_t)_{0 \leq t < \zeta}$ heißt stetiges Semimartingal mit Werten in U und Lebenszeit ζ, falls*

(i) $Y_t(\omega) \in U$ für alle $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ mit $t < \zeta(\omega)$.

(ii) Es existiert eine ankündigende Folge $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten ζ_n mit $\zeta_n \nearrow \zeta$, so dass der gestoppte Prozess $Y^{\zeta_n} = (Y_{t \wedge \zeta_n})$ ein stetiges Semimartingal ist.

ζ heißt Explosionszeit, falls zusätzlich gilt: $Y_{\zeta_n(\omega)}(\omega) \in \partial U$ für $\mathbf{P}$-f.a ω mit $\zeta(\omega) < \infty$.

Beispiel 7.3.4. Seien $(Y_t)_{0 \le t < \infty}$ stetiges Semimartingal mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und $U \subset \mathbb{R}^d$ offen. Definiere $\zeta := \tau_U :=$ Austrittszeit aus U.
Dann ist $(Y_t)_{0 \le t < \zeta}$ stetiges Semimartingal mit Werten in U und Explosionszeit ζ.
Denn: Wegen Stetigkeit von Y gilt $Y_t \to Y_{\tau_U} \in \partial U$ für $t \to \tau_U$ auf $\{\tau_U < \infty\}$ $\mathbf{P}$-f.s.

Annahme:
Sei im Folgenden $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^d$ offen.
Wir betrachten nun die SDG

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= b(t, X_t)\ \mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\ \mathrm{d}W_t \quad \text{auf } U, \\ X_0 &= \xi \in U, \end{aligned} \tag{7.9}$$

mit Borel-messbaren, lokal beschränkten $\mathbb{R}^d$- bzw. $\mathbb{R}^{d \times r}$-wertigen Funktionen b bzw. σ auf $\mathbb{R}_+ \times U$.

Definition 7.3.5. *Eine (starke)* Maximallösung *der SDG* (7.9) *auf U ist ein Semimartingal $(X_t)_{t<\zeta}$ mit Werten in U und Explosionszeit $\zeta > 0$ (f.ü.), so dass für eine ankündigende Folge $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stoppzeiten ζ_n gilt: X^{ζ_n} ist Lsg. der gestoppten SDG*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= b(t, X_t)\ \mathrm{d}(t \wedge \xi_n) + \sigma(t, X_t)\ \mathrm{d}W_t^{\xi_n} \quad \textit{auf } \mathbb{R}^d, \\ X_0 &= \xi. \end{aligned}$$

Bemerkung 7.3.6.

- ξ heißt auch *Lebenszeit* der Lsg. X.
- Für jede Maximallösung gilt f.s. auf $\{\zeta < \infty\}$:

$$X_t \to X_\zeta \in \partial U \quad \text{für } t \to \zeta$$

- Der Begriff Maximallösung ist unabhängig von der Wahl der Folge (ζ_n).

Satz 7.3.7. *Gegeben seien $U \subset \mathbb{R}^d$, offen, $U \neq \emptyset$, eine ZV ξ mit Werten in U, eine $\mathbb{R}^r$-wertige BB sowie stetige Koeffizienten $b(t,x), \sigma(t,x)$, die in x lok. Lipschitz-stetig seien: $\forall K \subset U\ \forall T\ \exists C$*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \le C \cdot |x - y| \quad (\forall x, y \in K, \forall t \in [0,T]).$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Maximallösung $X = (X_t)_{0 \le t < \zeta}$ von (7.9)*. (Insbesondere ist auch ζ eindeutig bestimmt).*

Beweis. Wähle Ausschöpfung $U_n \nearrow U$ mit $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$, U_n offen, $U_n \subset U$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $b^{(n)}$ und $\sigma^{(n)}$ gobal Lipschitz-stetig, global beschränkt und so, dass $b = b^{(n)}, \sigma = \sigma^{(n)}$ auf U_n gelte. Dann existiert eine eindeutig bestimmte starke Lösung $X^{(n)}$ zu den Koeffizienten $b^{(n)}, \sigma^{(n)}$ und der Anfangsbedingung ξ. Nun gilt für $m > n$: Bis zum Austritt aus U_n ist $X_\cdot^{(n)} = X_\cdot^{(m)}$ f.s. und:

$$\zeta_n = \zeta_m := \inf\{t \ge 0 : X_t^{(m)} \notin U_n\}.$$

Denn:

$$\begin{aligned}
X^{(m)}_{t\wedge\zeta_n} &= \xi + \int\limits_0^{\zeta_n\wedge t} b^{(m)}(x, X^{(m)}_s)\ \mathrm{d}s + \int\limits_0^{\zeta_n\wedge t} \sigma^{(m)}(x, X^{(m)}_s)\ \mathrm{d}W_s \\
&= \xi + \int\limits_0^{\zeta_n\wedge t} b^{(n)}(x, X^{(m)}_s)\ \mathrm{d}s + \int\limits_0^{\zeta_n\wedge t} \sigma^{(n)}(x, X^{(m)}_s)\ \mathrm{d}W_s \\
&= X^{(n)}_{t\wedge\zeta_n}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \zeta_n$ ist unabh. von $m > n$
$\Rightarrow X_t := X^{(n)}_t$ ist auf $\{t < \zeta_n\}$ unabh. von n
$\Rightarrow X_t$ ist auf $\{t < \zeta\}$ wohldefiniert mit $\zeta = \sup \zeta_n = \sup \tau_{U_n}$ und $X_t \to X_\zeta \in \partial U$ für $t \to \zeta$ auf $\{\zeta < \infty\}$.
Es folgt die Eindeutigkeit. □

Korollar 7.3.8. *Seien $f \in \mathcal{C}([0,\infty[\times U) \cap \mathcal{C}^{1,2}(]0,\infty[\times U)$ und*

$$M^f_t = f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int\limits_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s} + A_s f\right)(s, X_s)\ \mathrm{d}s$$

mit $A_t f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(t,x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i b_i(t,x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ und $a_{ik} = (\sigma\sigma^T)_{ik} = \sum\limits_{j=1}^r \sigma_{ij}\sigma_{kj}$.
Dann ist $M^f = (M^f)_{t<\zeta}$ ein stetiges, lokales Martingal mit Lebenszeit ζ.

Korollar 7.3.9. *(Verschärfung/Ergänzung) Seien $U = \mathbb{R}^d$ und b, σ wie vorher (Lipschitz-stetig in $x \in U$), zusätzlich beschränkt, zeitunabhängig. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, $W = (W_t)_{t\geq 0}$ seien vorgegeben.*
Für $x \in U$ sei $X^x = (X^x_t)_{t\geq 0}$ die Lsg. der SDG (7.9) mit Startbed. x, d.h. $X^x_0 = x$ f.s. Dann existieren Modifikationen, so dass die Abbildung $(t,x) \mapsto X^x_t(\omega)$ stetig in (t,x) ist für $\mathbf{P}$-f.a. ω. Der Prozess $(X^x_t, \mathbf{P}, \xi^x)_{x\in U, t\geq 0}$ ist ein Feller-Prozess (also ein starker Markov-Prozess).

Problem: Unter welchen Vor. gibt es zu geg. $a = (a_{ik})$ ein lok. Lipschitz-stetiges $\sigma = (\sigma_{ij})$ mit $a = \sigma\sigma^T$.
Eine Antwort: Sei a symmetrisch (das ist keine Einschränkung, $\widetilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$) und pos. semidefinit
$\Rightarrow \exists$ symm. $d \times d$-Matrix $\sigma := a^{1/2}$ mit $\sigma^2 = a$. Ist $a \in \mathcal{C}^2$, so ist σ lok. Lipschitz.

7.4 Schwache Lösungen

Sei zur Vereinfachung nun wieder $U = \mathbb{R}^d$ und $b(t,x) = b(x), \sigma(t,x) = \sigma(x)$ unabhängig von t, Borel-messbar, lokal beschränkt in $x \in \mathbb{R}^d$. Betrachte die SDG

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\ \mathrm{d}t + \sigma(X_t)\ \mathrm{d}W_t, \quad \mathbf{P} \circ X_0^{-1} = \mu. \tag{7.10}$$

Definition 7.4.1. *Gegeben* b, σ, μ. *Eine* schwache Lösung *der SDG* (7.10) *ist ein Paar* (X, W) *auf einem filtr. W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$, *so dass gilt:*

- W *ist* r*-dim.* $(\mathcal{F}_t)$*-BB*
- $P \circ X_0^{-1} = \mu$
- X *ist stetiges* $(\mathcal{F}_t)$*-Semimartingal mit* $X_t = X_0 + \int\limits_0^t b(X_s)ds + \int\limits_0^t \sigma(X_s)dW_s$.

Definition 7.4.2. (i) *Für Lösungen von* (7.10) *gilt* Verteilungseindeutigkeit, *wenn für je zwei schwache Lösungen* (X, W) *und* (X', W') *(auf filtrierten W-Räumen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$ *bzw.* $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbf{P}', \mathcal{F}_t{}')$*) zu derselben Startverteilung* μ *gilt:*
X und X' besitzen die gleichen Verteilungen.

(ii) *Für Lösungen von* (7.10) *gilt* pfadweise Eindeutigkeit, *wenn für je zwei schwache Lösungen* (X, W) *und* (X', W) *mit einer BB* W *auf einem filtr. W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$ *und mit gleicher Startvariable* $X_0 = X_0'$ *gilt:* X *und* X' *sind ununterscheidbar.*

Beispiel 7.4.3. $b \equiv 0, \sigma(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases}$,
$d = v = 1,\ \mathrm{d}X_t = \operatorname{sgn}(X_t)\ \mathrm{d}W_t,\ X_0 = 0$

(i) Dann ist X ein stetiges Martingal mit $\langle X \rangle_t = \int\limits_0^t (\operatorname{sgn}(X_s))^2\ \mathrm{d}\langle W \rangle_s = t$
$\Rightarrow X$ BB (stand.)
$\Rightarrow$ Es gilt Verteilungseindeutigkeit.

(ii) Sei X stand. 1-dim BB. Def. $W_t := \int\limits_0^t \operatorname{sgn}(X_s)dX_s$. Dann ist W eine 1-dim stand. BB.
$\Rightarrow X$ schwache Lösung zu Anfangsvert. $\mu = 0$.

(iii) Sei (X, W) schwache Lösung auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$
$\Rightarrow (-X, W)$ schwache Lösung auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$
$\Rightarrow$ keine pfadweise Eindeutigkeit.

Korollar 7.4.4. *Es seien* b *und* σ *lokal Lipschitz-stetig. Dann gilt die pfadweise Eindeutigkeit.*

Satz 7.4.5. *Aus der pfadweisen Eindeutigkeit folgt die Verteilungseindeutigkeit.*

Beweis. (i) Gegeben seien zwei schwache Lösungen $(X^{(j)}, W^{(j)})$ auf W-Räumen $(\Omega^{(j)}, \mathcal{A}^{(j)}, \nu^{(j)}, \mathcal{F}_t{}^{(j)})$, $j = 1, 2$, von (7.10) mit

$$\mu = \nu^{(1)}(X_0^{(1)} \in \cdot) = \nu^{(2)}(X_0^{(2)} \in \cdot) \quad \text{auf } (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)).$$

Setze $Y_{\cdot}^{(j)} := X_{\cdot}^{(j)} - X_0^{(j)}$ und $Z^{(j)} := (X_0^{(j)}, W^{(j)}, Y^{(j)})$, Letzteres mit Werten in $\Theta := \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}([0,\infty[,\mathbb{R}^r) \times \mathcal{C}([0,\infty[,\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^d$.
Sei $\mathbf{P}^{(j)}$ Verteilung von $Z^{(j)}$ unter $\nu^{(j)} \Rightarrow \mathbf{P}^{(j)}$ W-Maß auf $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta))$.
Elemente von Θ seien mit $v = (x, w, y)$ bezeichnet.
$\Rightarrow$ Randvert. von $\mathbf{P}^{(j)}$ in x-Variable = Vert. von $X_0^{(j)} = \mu$
Randvert. von $\mathbf{P}^{(j)}$ in w-Variable = Vert. von $W^{(j)}$ = Wiener-Maß $\mathbf{P}_*$
$\Rightarrow$ Vert. von $\mathbf{P}^{(j)}$ in (x, w)-Variable = $\mu \otimes \mathbf{P}_*$
Randvert. von $\mathbf{P}^{(j)}$ in y-Variable: W-Maß mit $y_0 = 0$ f.s.

(ii) Es existiert eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{Q}^{(j)} : \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^r \times \mathcal{B}(\mathcal{C}^d) \to [0,1]$$

mit folg. Eigenschaften:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}^d, w \in \mathcal{C}^r : Q^{(j)}(x, w, .)$ ist W-Maß auf $(\mathcal{C}^d, \mathcal{B}(\mathcal{C}^d))$

(2) $\forall F \in \mathcal{B}(\mathcal{C}^d) : (x, w) \mapsto \mathbf{Q}^{(j)}(x, w, F)$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{C}^r)$-messbar

(3) $\forall H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), G \in \mathcal{B}(\mathcal{C}^r), F \in \mathcal{B}(\mathcal{C}^d)$:

$$\mathbf{P}^{(j)}(H \times G \times F) = \int\limits_H \int\limits_G \mathbf{Q}^{(j)}(x, w, F)\mu(\mathrm{d}x)\mathbf{P}_*(\mathrm{d}w)$$

Denn: $\mathcal{C}^d$ ist polnisch (= vollst. metrisierbar, separabel) $\Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{C}^d)$ abzählbar bestimmt $\Rightarrow \exists \widehat{\mathbf{Q}}^{(j)}(\cdot) = \mathbf{P}^{(j)}(\cdot|\pi = \cdot)$
und $\mathbf{Q}^{(j)}(x, w, F) = \widetilde{\mathbf{Q}}^{(j)}((x, w), \widetilde{F}) = \mathbf{P}^{(j)}(\widetilde{F}|\pi = (x, w))$
mit $\pi(x, w, y) = (x, w)$ Proj. $\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^r$
und $\widetilde{F} = \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^r \times F$.

(iii) Definiere: $\Omega := \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^d \times \mathcal{C}^d$ und W-Maß $\mathbf{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ durch

$$\mathbf{P}(\mathrm{d}x\ \mathrm{d}w\ \mathrm{d}y_1\ \mathrm{d}y_2) = Q^{(1)}(x, w,\ \mathrm{d}y_1)Q^{(2)}(x, w,\ \mathrm{d}y_2)\mu(\mathrm{d}x)\mathbf{P}_*(\mathrm{d}w),$$

$\mathcal{N}$ System d. $\mathbf{P}$-Nullm. in Ω, $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{B}(\Omega) \cup \mathcal{N})$,
$\mathcal{G}_t := \sigma\{(x, w(s), y_1(s), y_2(s)) : s \in [0, t]\}$, $\widetilde{\mathcal{G}}t = \sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N})$ Augment.
$\mathcal{F}_t := \widetilde{\mathcal{G}}_{t+}$
$\Rightarrow (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$ genügt den üblichen Bedingungen
Dann gilt $\forall A \in \mathcal{B}(\Theta)$:

$$\mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega : (x, w, y_j) \in A\}\right) = \nu^{(j)}\left(\left\{\left(X_0^{(j)}, W^{(j)}, Y^{(j)}\right) \in A\right\}\right)$$

$\Rightarrow$ Vert. von $(x + y_i, w)$ unter $\mathbf{P}$ = Vert. von $(X_0^{(j)}, W^{(j)})$ unter $\nu^{(j)}$
$\Rightarrow (x + y_j, w)$ ist Lsg. der SDG $(\forall j = 1, 2)$, def. auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$.

(iv) Aus pfadweiser Eindeutigkeit folgt:

$$\mathbf{P}\left[\omega = (x, w, y_1, y_2) \in \Omega : y_1 = y_2\right] = 1$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \nu^{(1)}(X^{(1)} \in .) &= \nu^{(1)}(X_0^{(1)} + Y^{(1)} \in .) = \mathbf{P}(x + y_1 \in .) = \mathbf{P}(x + y_2 \in .) \\ &= \nu^2(X_0^{(2)} + Y^{(2)} \in .) = \nu^{(2)}(X^{(2)} \in .) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Verteilungseindeutigkeit.

□

7.5 Schwache Lösungen und Lösungen des Martingalproblems

b, σ wie bisher: $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ bzw. $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times d}$ Borel-mb, lokal beschränkt, $a = \sigma\sigma^T$ symmetrisch, pos. semidefinit, $L := \frac{1}{2} \sum a_{ik} \partial_i \partial_k + \sum b_i \partial_i$, d.h.

$$Lu(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)$$

Definition 7.5.1. *Ein W-Maß* $\mathbf{P}$ *auf* $\mathcal{C}^d = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ *heißt Lösung des* Martingalproblem*s zum Operator L, falls für alle* $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *gilt:*
$M^f = (M_t^f)_{t \geq 0}$ *ist stetiges Martingal auf* $(\mathcal{C}^d, \mathcal{B}(\mathcal{C}^d), \mathbf{P}, {\mathcal{F}_t}^0)$ *mit*

$$M_t^f(\omega) := f(\omega(t)) - f(\omega(0)) - \int_0^t Lf(\omega(s))\, \mathrm{d}s.$$

Proposition 7.5.2. *Äquivalent sind für ein W-Maß auf* $\mathcal{C}^d$*:*

(i) $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty : M^f$ *ist stetiges Martingal*

(ii) $\forall f \in \mathcal{C}^2 : M^f$ *ist lokales stetiges Martingal*

(iii) $\forall f(x) = x_i$ *und* $f(x) = x_i x_k : M^f$ *ist lokales Martingal*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei zunächst $f \in \mathcal{C}_c^2$. Dann existieren eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ und eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in \mathcal{C}^\infty$, $\mathrm{supp} f_n \subset K$, $f_n \to f$, $\partial_i f_n \to \partial_i f$ und $\partial_i\partial_k f_n \to \partial_i \partial_k f$ glm. auf K
$\Rightarrow M^f$ ist stet. Martingal.
Sei schließlich $f \in \mathcal{C}^2$. Dann existieren kompakte Mengen $K_n \nearrow \mathbb{R}^d$, eine Funktionenfolge$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in \mathcal{C}^2$, $\mathrm{supp} f_n \subset K_n$ und $f_n = f$ auf K_n.
$\Rightarrow M^f$ ist lokales stetiges Martingal.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): trivial.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) [Sketch]: Zunächst gilt für alle $\Theta \in \mathbb{R}^d$ und $f(x) := \exp(\langle \Theta, x \rangle)$: M^f lokales stetiges Martingal $\Rightarrow$ (Denn: Obige f liegen dicht in $\mathcal{C}^2$ bzgl. lok. glm. Konv. von f, $\partial_i f$, $\partial_i \partial_k f$): $\forall f \in \mathcal{C}^2$: M^f lokales stetiges Martingal
(ii) $\Rightarrow$ (i): $f \in \mathcal{C}_c^2 \Rightarrow f, \partial_i f, \partial_i \partial_k f$ beschränkt $\Rightarrow M^f$ beschränkt auf $[0, T] \Rightarrow M^f$ stetiges Martingal. □

Bemerkung 7.5.3. Für $b \equiv 0$ und $a \equiv \mathrm{id}$ ist das „Satz von Lévy“.

Satz 7.5.4. *Gegeben seien Koeffizienten b, a und Startverteilung μ. Äquivalent sind:*

(i) *Es existiert eine Lösung $\mathbf{P}$ des Martingalproblems zu $L = \frac{1}{2}a_{ik}\partial_i\partial_k + b_i\partial_i$ mit $\mathbf{P}(\omega(0) \in .) = \mu$.*

(ii) *Es existiert eine schwache Lösung (X, W) auf einem W-Raum $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbf{P}}, \widetilde{\mathcal{F}_t})$ der SDG (7.10) mit Startverteilung μ zu Koeffizienten b, σ mit $\sigma\sigma^T = a$.*

Der Zusammenhang zwischen (i) und (ii) ist gegeben durch: $\mathbf{P} = \widetilde{\mathbf{P}} \circ X^{-1}$.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i) Itô-Formel:

$$
\begin{aligned}
& f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)\,\mathrm{d}s \\
= \ & \int_0^t \sum_i \partial_i f(X_s)\,\mathrm{d}X_s^i + \frac{1}{2}\int \sum_{i,j} \partial_i\partial_j f(X_s)\,\mathrm{d}\langle X^i, X^j\rangle_s - \int Lf(X_s)\,\mathrm{d}s \\
= \ & \underbrace{\int \sum_{i,j} \partial_i f \partial_{i,j}\,\mathrm{d}X_s^j}_{\text{Martingal}} + \underbrace{\int \sum_i \partial_i f \cdot b_i\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int \sum_{i,j,k} \partial_i\partial_j f\,\underbrace{\sigma_{ij}\sigma_{ik}}_{=a_ij}\,\mathrm{d}s - \int Lf\,\mathrm{d}s}_{=0}
\end{aligned}
$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) [Sketch]:

(1) Sei X der kanonische Prozess auf $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$.
Definiere: $M_t := X_t - X_0 - \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}s$. Dann ist $M_t^{(i)}$ ein lokales stetiges Martingal für alle $f \in \mathcal{C}^2$
$\Rightarrow M^{(i)} = M^f$ mit $f(x) = x_i$ ist lokales stetiges Martingal unter $(\mathbf{P}, \mathcal{F}_t^0)$.
Für alle i, k und $f(x) = x_i x_k$ gilt: Der folgende Prozess ist ein lokales stetiges Martingal:

$$
\begin{aligned}
M_t^f &= X_t^{(i)}X_t^{(k)} - X_0^{(i)}X_0^{(k)} - \int_0^t \left[X_s^{(i)}b_k(X_s) + X_s^{(k)}b_i(X_s) + a_{ik}(X_s)\right]\,\mathrm{d}s \\
&= \cdots = M_t^{(i)}M_t^{(k)} - X_0^{(i)}M_t^{(k)} - X_0^{(k)}M_t^{(i)} - \int_0^t a_{ik}(X_s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \langle M^{(i)}, M^{(k)}\rangle_t = \int_0^t a_{ik}(X_s)\,\mathrm{d}s.$

(2) Sei nun $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ Borel-messbar, $\beta(x)$ ist $d \times d$-Orthogonalmatrix mit $\widetilde{a}(x) := (\beta^T a \beta)(x)$ Diagonalmatrix.
Definiere $\widetilde{\sigma}(x)$ als $d \times d$-Matrix mit $\widetilde{\sigma}_{ij} = \beta_{ji}\sqrt{\widetilde{a}_{ii}}$
$\Rightarrow \widetilde{\sigma}\widetilde{\sigma}^T = \widetilde{\sigma}^T\widetilde{\sigma} = a$

(3) $r :=$ Rang $(\widetilde{\sigma}) \leq d$; Probleme falls $< d$!
Sei E die $d \times d$-Matrix mit r Einsen auf der Diagonalen, 0 sonst.
$\Rightarrow \exists$ Orthogonalmatrix ϕ mit $\widetilde{\sigma}\phi = \widetilde{\sigma}\phi E$ und Matrix λ mit $\lambda\widetilde{\sigma}\phi = E$.

(4) Setze $N_t := \int\limits_0^t \lambda(X_s) dM_s$. Dann ist N ein stetiges, $\mathbb{R}^d$-wertiges lokales Martingal.

$$\begin{aligned} \langle N^i, N^j \rangle_t &= \sum_{kl} \int\limits_0^t \lambda_{ik}(X_s)\lambda_{jl}(X_s)\, \mathrm{d}\langle M^{(k)}, M^{(l)}\rangle_s \\ &= \sum_{kl} \int\limits_0^t (\lambda_{ik} a_{kl} \lambda^T_{lj})(X_s)\, \mathrm{d}s \\ &= \int\limits_0^t (E)_{ij}(X_s)\, \mathrm{d}s = \delta_{ij} \int\limits_0^t \mathbb{1}_{\{\text{Rang } \widetilde{\sigma}(X_s) \geq 1\}}\, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Setze $Y_t := \int\limits_0^t (\widetilde{\sigma}\phi)(X_s)\, \mathrm{d}N_s \Rightarrow \langle Y - M \rangle = 0 \Rightarrow Y = M$.

(5) Wähle nun Erweiterung $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbf{P}})$ des W-Raums $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, so dass eine BB $\widetilde{W} = (\widetilde{W}^1, \dots, \widetilde{W}^d)$ existiert, die unabhängig von N ist.
Definiere: $\overline{W}^i_t := N^i_t + \int\limits_0^t \mathbb{1}_{\{\text{Rang } \widetilde{\sigma}(X_s) < i\}}\, \mathrm{d}\widetilde{W}^i_s$
$\Rightarrow \overline{W}^i_t$ lokales Martingal, $\langle \overline{W}^i_t, \overline{W}^j_t \rangle = \delta_{ij} t$
$\Rightarrow \overline{W}$ d-dim BB
Ebenso $W_t = \int\limits_0^t \beta(X_s)\, \mathrm{d}\overline{W}_s$ (denn: $\beta(x)$ ist Orthogonalmatrix).

$$\begin{aligned} \Rightarrow M &= Y = (\widetilde{\sigma}\phi)(X) \cdot N = (\widetilde{\sigma}\phi E_r)(X) \cdot \overline{W} = (\widetilde{\sigma}\phi)(X) \cdot \overline{W} \\ &= (\widetilde{\sigma}\phi\beta^T)(X) \cdot W = \sigma(X) \cdot W \end{aligned}$$

mit $\sigma := \widetilde{\sigma}\phi\beta^T$ ist $d \times d$ Matrix.

$\square$

Korollar 7.5.5. *Äquivalent sind:*

(i) *Für alle Startverteilungen μ auf $\mathbb{R}^d$ ist die Lösung eindeutig: Es existiert höchstens ein W-Maß auf $\mathcal{C}^d$, das Lösung des Martingalproblems zu den Koeffizienten a, b und zu der Anfangsverteilung $= \mu$ ist.*

(ii) *Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist die Lösung eindeutig: Es existiert höchstens ein W-Maß auf $\mathcal{C}^d$, das Lösung des Martingalproblems zu den Koeffizienten a, b und zu der Anfangsverteilung $= \delta_x$ ist.*

(iii) *Für alle σ mit $\sigma\sigma^T = a$ gilt Verteilungseindeutigkeit für Lösungen der SDG zu den Koeffizienten σ, b.*

Definition 7.5.6. *Das Martingalproblem zu Koeffizienten a, b ist wohlgestellt, falls gilt: $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $\exists!$ Lösung $\mathbf{P}^x$ mit $\mathbf{P}^x(X_0 = x) = 1$.*

Beispiel 7.5.7. Für $a = \sigma\sigma^T$ mit σ, b Lipschitz-stetig und linear beschränkt ist das Martingal-Problem wohlgestellt.

Satz 7.5.8 (Stroock, Varadhan)**.** *Es seien a glm. stetig, b, a beschränkt, a glm. elliptisch. Dann ist das Martingal-Problem wohlgestellt.*

Bemerkung 7.5.9. $a(x)$ ist *gleichmäßig elliptisch* genau dann, wenn

$$\exists \lambda > 0 \text{ sodass } \forall x, \xi \in \mathbb{R}^d : \xi^T a(x) \xi \geq \lambda |\xi|^2$$

7.6 Die starke Markov-Eigenschaft

Gegeben seien b, σ zeitunabhängig, Borel-messbar, lokal beschränkt, so dass Martingalproblem wohlgestellt sei. Es seien $\Omega = \mathcal{C}^d = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$, $X_t(\omega) = \omega(t)$, ${\mathcal{F}_t}^0$ und $\mathbf{P}^x =$ Lösung des Martingalproblems.
Seien T beschränkte $({\mathcal{F}_t}^0)$-Stoppzeit, Θ_T der Shift-Operator: $\omega \mapsto \omega(\cdot + T(\omega))$.
Es sei

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{Q}^x = \Omega \times \mathcal{A} & \rightarrow & [0,1] & \\ (\omega, F) & \mapsto & \mathbf{Q}^x_\omega(F) & = \mathbf{P}^x(F | \mathcal{F}^0_T)(\omega) \end{array}$$

reguläre bedingten Wahrscheinlichkeit.

Lemma 7.6.1. *Es existiert eine $\mathbf{P}^x$-Nullmenge $\mathcal{N} \in \mathcal{A}$, so dass für alle $\omega \notin \mathcal{N}$ gilt: Das W-Maß $\widetilde{\mathbf{P}}_\omega = \mathbf{Q}^x_\omega \circ \Theta_T$ löst das Martingalproblem zum Startpunkt $\omega(T(\omega))$.*

Beweis. Nach Definition von regulären bedingten Wahrscheinlichkeiten gilt: Es existiert eine Nullmenge $\mathcal{N}$ mit:
$\mathbf{Q}^x_\omega(F) = \mathbb{1}_F(\omega) \quad \forall F \in \mathcal{F}^0_{T'}, \forall \omega \notin \mathcal{N}$.
$\Rightarrow \mathbf{Q}^x_\omega(\Omega^{(\omega)}) = 1 \quad \forall \omega \notin \mathcal{N}$ mit $\Omega^{(\omega)} := \{\omega' \in \Omega : X_T(\omega') = X_T(\omega)\}$.
$\Rightarrow \widetilde{\mathbf{P}}_\omega\left([\omega' \in \Omega : \omega'(0) = \omega(T(\omega))]\right) = \mathbf{Q}^x_\omega\left[\omega' \in \Omega : \omega'(T(\omega')) = \omega(T(\omega))\right] = 1$.
d.h Startpunkt unter $\widetilde{\mathbf{P}}_\omega$ ist $\omega(T(\omega))$. □

Korollar 7.6.2. *Voraussetzungen wie eben.*
Dann gilt die starke Markov-Eigenschaft*:* $\forall F \in \mathcal{A}$*:*

$$\mathbf{P}^x\left[\Theta_T^{-1}F|\mathcal{F}_T^0\right](\omega) = \mathbf{P}^{\omega(T)}[F] \quad \mathbf{P}^x\text{-}f.s.$$

Beweis. $\mathbf{P}^x\left[\Theta_T^{-1}F|\mathcal{F}_T^0\right](\omega) = \mathbf{Q}_\omega(\Theta_T^{-1}F) = \widetilde{\mathbf{P}}_\omega(F) = \mathbf{P}^{\omega(T(\omega))}(F)$. □

Bemerkung 7.6.3. Man kann ferner zeigen (mit viel Aufwand) $x \mapsto \mathbf{P}^x(F)$ ist Borel-messbar ($\forall F \in \mathcal{A}$)
$\Rightarrow (X_t, \mathbf{P}^x)$ ist starker MP.

7.7 SDG und PDG

Gegeben $\sigma = (a_{ikj}(x))_{i,k=1,\ldots,d;j=1,\ldots,r}$, $b = (b_i(x))$ beschr. Lipschitz, symmetrisch, positiv semidefinit, beschränkt, Borel-messbar.
Sei $(X_t, \mathbf{P}^x)$ Lösung.

Satz 7.7.1. *Gegeben* $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d), u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ *mit*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu & \text{in } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) = f & \text{auf } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

(Lösung des Cauchy-Problems).
Dann gilt $u(t,x) = \mathbf{E}^x[f(X_t)]$*, insbesondere ist* u *eindeutig durch* f *bestimmt.*

Beweis. Fixiere $t_0 > 0$ und betrachte $M_t := u(t_0 - t, X_t)$. Nach der Itô-Formel gilt:

$$M_t = M_0 + \text{ lok. Martingal } + \underbrace{\int_0^t Lu(t_0 - s, X_s) - \frac{\partial}{\partial t}u(t_0 - s, X_s)\,\mathrm{d}s}_{=0 \text{ nach Vor.}}$$

$\Rightarrow M_t$ lok. Martingal + beschr. $\Rightarrow M$ ist Martingal
$\Rightarrow u(t_0, x) = M_0 = \mathbf{E}^x[M_0] = \mathbf{E}^x[M_{t_0}] = \mathbf{E}^x[u(0, X_{t_0})] = \mathbf{E}^x[f(X_{t_0})]$. □

Satz 7.7.2. *Gegeben seien* $D \subset \mathbb{R}^d$ *und* $Z = (\{0\} \times D) \cup (\mathbb{R}_+ \times \partial D)$*.*
Seien $f \in \mathcal{C}_b(Z)$ *und* $u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+ \times \overline{D}) \cap \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}_+^* \times D)$ *mit*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u = Lu & \text{in } \mathbb{R}_+^* \times D, \\ u = f & \text{auf } Z. \end{cases}$$

Dann gilt: $u(t,x) = \mathbf{E}^x[f(t - t \wedge \tau_D, X_{t\wedge\tau_D})]$.

Beweis. Sei $M_t := u(t_0 - t, X_t)$ wie oben.
$\Rightarrow (M_t)_{0 \le t < \tau_D}$ lok. Martingal, beschr.
$\Rightarrow (M_{t\wedge\tau_D})_{t\ge 0}$ ist Martingal
$\Rightarrow u(t_0, x) = \mathbf{E}^x[M_0] = \mathbf{E}^x[M_{t_0\wedge\tau_D}] = \mathbf{E}^x[f(t_0 - t_0 \wedge \tau_D, X_{t_0\wedge\tau_D})]$. □

Divergenz-Probleme

Satz 7.7.3. *Gegeben seien $D \subset \mathbb{R}^d$ mit $\tau_D < \infty$ $\mathbf{P}^x$-f.s. $(\forall x \in D)$ und $f \in \mathcal{C}_b(\partial D)$. Es sei $u \in \mathcal{C}_b(\overline{D}) \cap \mathcal{C}_b^2(D)$ mit*

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } D, \\ u = f & \text{auf } \partial D. \end{cases}$$

Dann ist $u(x) = \mathbf{E}^x[f(X_{\tau_D})]$.

Beweis. Def. $v(t,x) := u(x) \quad \forall t \geq 0$
$\Rightarrow v$ löst $\frac{\partial}{\partial t} v = Lv$ in $\mathbb{R}_+^* \times D$
Dies impliziert:

$$\begin{aligned} u(x) = v(t,x) &= \mathbf{E}^x[f(X_{\tau_D}) \cdot \mathbb{1}_{\{t > \tau_D\}}] + \mathbf{E}^x[u(X_t) \cdot \mathbb{1}_{\{t \geq \tau_D\}}] \\ &\longrightarrow \mathbf{E}^x[f(X_{\tau_D})] + 0 \text{ für } t \to \infty, \text{ denn } \mathbf{P}^x[\tau_D < \infty] = 1. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.7.4. Ist D beschränkt und $\sigma\sigma^T$ glm. elliptisch, so ist $\tau_D < \infty \quad \mathbf{P}^x$-f.s. $\forall x \in D$. Nicht erfüllt (z.B.) für $\sigma \equiv 0$.

Satz 7.7.5 (Poisson-Problem)**.** *Gegeben seien $D \subset \mathbb{R}^d$ mit $\mathbf{E}^x[\tau_D] < \infty$ $\forall x \in D$ und $g \in \mathcal{C}_b(D)$. Es sei $u \in \mathcal{C}_b(\overline{D}) \cap \mathcal{C}_b^2(D)$ mit*

$$\begin{cases} Lu = -g & \text{in } D, \\ u = 0 & \text{auf } \partial D. \end{cases}$$

Dann ist $u(x) = \mathbf{E}^x\left[\int\limits_0^{\tau_D} g(X_s)\, \mathrm{d}s\right]$.

Beweis. Betrachte $M_t := u(X_t) + \int\limits_0^t g(X_s)\, \mathrm{d}s$
$\Rightarrow (M_t)_{0 \leq t < \tau_D}$ lok. Martingal, beschr.
$\Rightarrow (M_{t \wedge \tau_D})_{0 \leq t \leq \infty}$ ist Martingal
$\Rightarrow u(x) = M_0 = \mathbf{E}^x[M_0] = \mathbf{E}^x[M_{\tau_D}] = \mathbf{E}^x\left[\int\limits_0^{\tau_D} g(X_s)\, \mathrm{d}s\right]$. □

Bemerkung 7.7.6.

- Falls D beschr. und $\sigma\sigma^T$ glm. elliptisch, dann $\mathbf{E}^x[\tau_D] < \infty$.
- Darstellung gilt auch für $D = \mathbb{R}^d, d \geq 3$, wobei u allerdings nur eindt. mod const. (z.B. $g \in \mathcal{C}_0, u \in \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_b^2 \ldots$).

Korollar 7.7.7. *Falls $Lu = -g$ in D, $u = f$ auf ∂D, so ist*
$u(x) = \mathbf{E}^x \left[f(X_{\tau_D}) + \int_0^{\tau_D} g(X_s)\, \mathrm{d}s \right]$

Wann gilt $\mathbf{E}^x[\tau_D] < \infty$?
Ziel: Konstruiere $u \in \mathcal{C}_b^2(\overline{D})$ mit $-Au \geq 1$
$\Rightarrow \mathbf{E}^x(t \wedge \tau_D) \leq \mathbf{E}^x \left[-\int_0^{t\wedge\tau_D} Au(X_s)\, \mathrm{d}s \right] = -\mathbf{E}^x[u(X_{t\wedge\tau_D})] + u(x) \leq 2\|u\| < \infty$

Beispiel 7.7.8. $\sigma_{ij} = \delta_{ij}, b = 0, X =$BB, $D = B_R(0)$
$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{d}(R^2 - \|x\|^2) \Rightarrow Au = \frac{1}{2}\Delta u = -1$
$\Rightarrow \mathbf{E}^x[\tau_D] = u(x) - \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{E}^x[u(X_{t\wedge\tau_D})] = u(x) = \frac{1}{d}(R^2 - \|x\|^2)$

Lemma 7.7.9. *Falls $\xi \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ und $\delta > 0$ existieren, so dass für alle $x \in D$ gilt: $\xi a(x) \xi \geq \delta$, dann ist $\mathbf{E}^x[\tau_D] < \infty \quad (\forall x \in D)$.*

Beweis. Seien $\beta = \|b\|_\infty, \nu = 2\beta/\delta$, $u(x) = -\mu \exp(\nu\langle x, \xi\rangle) = -ue^{\nu x_1}$. OBdA: $\xi = (1, 0, \ldots, 0)$
$\Rightarrow u \in \mathcal{C}_b^2(\overline{D})$

$$\begin{aligned} -Au(x) &= \mu e^{\nu\langle x_1\rangle} \cdot \left[\frac{1}{2}\nu^2 a_1(x) + \nu b_1(x)\right] \\ &\geq \mu e^{\nu x_1} \cdot \frac{1}{2}\nu\delta[\nu - 2\beta/\delta] \\ &\geq 1 \text{ auf } \overline{D} \text{ falls } \mu \text{ hinr. groß.} \end{aligned}$$

□

Satz 7.7.10 („Schrödinger-Gleichung“). *Seien D wie eben, $\tau := \tau_D$, $q \in \mathcal{C}_b(D)$ mit $q \geq 0$ und $f \in \mathcal{C}_b(\partial D)$. Es sei $u \in \mathcal{C}_b(\overline{D}) \cap \mathcal{C}_b^2(D)$ mit*

$$\begin{cases} Lu = qu & \text{in } D, \\ u = f & \text{auf } \partial D. \end{cases}$$

Dann gilt: $u(x) = \mathbf{E}^x \left[f(X_\tau) e^{-\int_0^\tau q(X_s)\, \mathrm{d}s} \right]$.

Beweis. Sei $A_t := \int_0^t q(X_s)\, \mathrm{d}s$ und $N_t := u(X_t)e^{-A_t}$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} N_t &= N_0 + \int_0^t e^{-A_s}\, \mathrm{d}u(X_s) + \int_0^t u(X_s)\, \mathrm{d}e^{-A_s} + 0 \\ &= N_0 + \text{ lok. Martingal } - \int_0^t u(X_s)e^{-A_s}\, \mathrm{d}A_s + \int_0^t e^{-A_s} Lu(X_s)\, \mathrm{d}s \quad \text{für } t < \tau \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall \tau' < \tau$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^x\left[e^{-A_{\tau'}}u(X_{\tau'})\right] &= \mathbf{E}^x[N_{\tau'}]\\ &= u(x) - \mathbf{E}^x\left[\int_0^{\tau'} e^{-A_s}u(X_s)q(X_s)\ \mathrm{d}s\right] + \mathbf{E}^x\left[\int_0^{\tau'} e^{-A_s}Lu(X_s)\ \mathrm{d}s\right]\\ &= u(x)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{E}^x\left[e^{-A_\tau}u(X_\tau)\right] = u(x)$. □

Bemerkung 7.7.11. Statt $q \geq 0$ reicht $\mathbf{E}^x\left[e^{-\int_0^\tau q(X_s)\ \mathrm{d}s}\right] < \infty$.

7.8 Feller-Eigenschaft

Satz 7.8.1 (Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung)**.** $\forall 0 < p < \infty\ \exists C = C(p)\ \forall M \in \mathcal{M}_0^{loc}$

$$\frac{1}{C}\mathbf{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq \mathbf{E}\left[(M_\infty^*)^p\right] \leq C \cdot \mathbf{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{p/2}\right]$$

Hierbei $M_t^* := \sup_{s\leq t}|M_s|$.

Beweis. der 2. Ungleichung im Fall $p \geq 2$:
OBdA: M beschränkt (ansonsten $M \rightsquigarrow M^T$). Wegen $x \mapsto |x|^p\ \mathcal{C}^2$ folgt mit Itô:

$$|M_\infty|^p = \int_0^\infty p|M_s|^{p-1}\mathrm{sgn}(M_s)\ \mathrm{d}M_s + \frac{1}{2}\int_0^\infty p(p-1)|M_s|^{p-2}\ \mathrm{d}\langle M\rangle_s.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \mathbf{E}[(M_\infty^*)^p] &\overset{\text{Doob}}{\leq} \mathbf{E}\left[|M_\infty|^p\right]\\ &= \frac{p(p-1)}{2}\mathbf{E}\left[\int_0^\infty |M_s|^{p-2}\ \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right]\\ &\leq \frac{p(p-1)}{2}\mathbf{E}\left[|M_\infty^*|^{p-2}\langle M\rangle_\infty\right]\\ &\overset{Cauchy-Schwarz}{\leq} \frac{p(p-1)}{2}\mathbf{E}\left[|M_\infty^*|^p\right]^{\frac{p-2}{p}}\mathbf{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{p/2}\right]^{2/p}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{E}\left[(M_\infty^*)^p\right] \leq \left[\frac{p^{p+1}(p-1)^{1-p}}{2}\right]^{p/2}\mathbf{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{p/2}\right]$. □

Lemma 7.8.2 (Kolmogorov-Chentsov)**.** *Sei $I = [0,1]^d$. Sei $(X_t)_{t\in I}$ ein stoch. Prozess mit Werten in einem vollst. metrischen Raum (E,δ). Falls positive Konstanten α,β,γ existieren mit*

$$\mathbf{E}\left[\delta(X_s,X_t)^\alpha\right] \le \gamma\cdot\|s-t\|^{d+\beta}$$

für alle $s,t\in I$, dann existiert eine stetige Modifikation *von X.*

Satz 7.8.3. *Seien σ, b Lipschitz-stetig (in x) und linear beschränkt. Dann existiert ein stochastischer Prozess*

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+\times\Omega &\to \mathbb{R}^d \\ (x,t,\omega) &\mapsto X_t^x(\omega) \end{aligned}$$

mit stetigen Pfaden (bzgl. x und t), so dass für alle $x\in\mathbb{R}^d$ gilt: $(X_t^x)_{t\ge 0}$ ist die eindeutige starke Lösung der SDG zu (b,σ) mit Anfangsbedingung x, d.h.

$$X_t^x = x + \int_0^t b(s,X_s^x)\ \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,X_s^x)\ \mathrm{d}W_s \quad \mathbf{P}\text{-}f.s.$$

Beweis. (i) Wähle $p\ge 2$ und Lösung X^x bzw. X^y der SDG mit Anfangswerten x bzw. y. Setze $h(t) = \mathbf{E}\left[\sup_{s\le t}|X_s^x - X_s^y|^p\right]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathbf{E}\left[\sup_{s\le t}\left|[x-y] + \int_0^s [b(r,X_r^x)-b(r,X_r^y)]\ \mathrm{d}r + \int_0^s [\sigma(r,X_r^x)-\sigma(r,X_r^y)]\ \mathrm{d}W_r\right|^p\right] \\ &\le 3^{p-1}\mathbf{E}\left[|x-y|^p + \sup_{s\le t}\left|\int_0^s [b(r,X_r^x)-b(r,X_r^y)]\ \mathrm{d}r\right|^p + \sup_{s\le t}\left|\int_0^s [\sigma(r,X_r^x)-\sigma(r,X_r^y)]\ \mathrm{d}W_r\right|^p\right] \end{aligned}$$

Mit BDG-Ungleichung gilt für den 3. Summanden:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\sup_{s\le t}\left|\int_0^s [\sigma(r,X_r^x)-\sigma(r,X_r^y)]\ \mathrm{d}W_r\right|^p\right] \\
&\le\quad C_p\cdot\mathbf{E}\left[\left\langle\int_0^{\cdot} [\sigma(r,X_r^x)-\sigma(r,X_r^y)]\ \mathrm{d}W_r\right\rangle_t^{p/2}\right] \\
&=\quad C_p\cdot\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t |\sigma(r,X_r^x)-\sigma(r,X_r^y)|^2\ \mathrm{d}r\right)^{p/2}\right] \\
&\overset{\text{Hölder}}{\le}\quad C_p\cdot t^{\frac{p-2}{2}}\cdot\mathbf{E}\left[\int_0^t |\sigma(r,X_r^x)-\sigma(r,X_r^y)|^p\ \mathrm{d}r\right] \\
&\le\quad K^p\cdot C_p\cdot t^{\frac{p-2}{2}}\cdot\mathbf{E}\left[\int_0^t \sup_{s\le r}|X_s^x-X_s^y|^p\ \mathrm{d}r\right] \\
&=\quad K^p\cdot C_p\cdot t^{\frac{p-2}{2}}\int_0^t h(r)\ \mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Analog

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\le t}\left|\int_0^s [b(r,X_r^x)-b(r,X_r^y)]\,dr\right|^p\right]\le K^p\cdot C_p\cdot t^{p-1}\int_0^t h(r)\ \mathrm{d}r$$

Also insgesamt: $\exists c=c(K,p,t):$

$$h(t)\le c|x-y|^p+c\cdot\int_0^t h(r)\ \mathrm{d}r.$$

Mit Gronwall: $\exists c'=c'(K,p,t)$: $h(t)\le c'|x-y|^p$, d.h.

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\le t}|X_s^x-X_s^y|^p\right]\le c'\cdot|x-y|^p. \tag{7.11}$$

(ii) Wende nun „Kolmogorov-Chentsov" an auf den Prozess $(Y_x)_{x\in I}$ mit $I=\mathbb{R}^d$ und Werten im norm. Raum $E=\mathcal{C}([0,t],\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}
Y_\cdot:\mathbb{R}^x\times\Omega &\to E\\
(x,\omega)&\mapsto Y_x(\omega)=X_\cdot^x(\omega)
\end{aligned}$$

mit Norm $\|Y_x(\omega)\| = \sup_{s\leq t} |X_s^x(\omega)|$
(7.11) lautet: $\forall p, t : \exists c' = c'(K, p, t) : \forall x, y :$

$$\mathbf{E}\left[\|Y_x - Y_y\|^p\right] \leq c' \cdot \|x - y\|^p.$$

Wähle $p > d$. Dann existiert eine stetige Modifikation $\widetilde{Y}$ von Y, d.h.

$$\begin{array}{rcl} \exists \text{ stetiger Prozess (in } x \text{ und } t\text{) } \widetilde{X} : \mathbb{R}^d \times [0,t] \times \Omega & \to & \mathbb{R}^d \\ (x, s, \omega) & \mapsto & \widetilde{X}_s^x(\omega), \end{array}$$

so dass $\widetilde{X}^x$ und X^x für alle $x \in \mathbb{R}^d$ äquivalent sind (also fast sicher gleich sind). $\widetilde{X}^x$ ist also Lösung der SDG mit Anfangsbedingung x (für alle x). D.h.: OBdA $X \equiv \widetilde{X}$. Damit ist $(t, x) \longmapsto X_t^x(\omega)$ stetig für $\mathbf{P}$-fast alle ω.

□

Seien nun b, σ nur von x abhängig. Definiere: $P_t(x, A) := \mathbf{P}(X_t^x \in A)$, $P_t f(x) := \mathbf{E}[f(X_t^x)]$.

Satz 7.8.4. *$(P_t)_{t\geq 0}$ ist Feller-Halbgruppe, d.h. es gilt: $P_t : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_0$ und $\lim_{t\to 0} P_t f = f \quad (\forall f \in \mathcal{C}_0)$ (punktweise – oder äquivalent – gleichmäßig).*

Beweis. Wegen Stetigkeit von f und Stetigkeit von X_t^x (in x und t) ist

$$P_t f(x) = \mathbf{E} f(X_t^x)$$

stetig in x und t (major. Konvergenz). Also gilt: $P_t f \in \mathcal{C}_b$ und $\lim P_t f = f \quad (\forall f \in \mathcal{C}_b)$.
Sei nun $f \in \mathcal{C}_0$. Z.z.: $P_t f \in \mathcal{C}_0$. Nun ist

$$|P_t f(x)| \leq \sup_{B_r(x)} |f| + \|f\|_\infty \cdot \mathbf{P}[X_t^x \notin B_r(x)] \tag{7.12}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X_t^x \notin B_r(x)] &\leq r^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}\left(|X_t^x - x|^2\right) \\ &\leq \frac{2}{r^2} \mathbf{E}\left(\left| \int_0^t \sigma(X_s^x)\, \mathrm{d}W_s \right|^2 \right) + \frac{2}{r^2} \mathbf{E}\left(\left| \int_0^t b(X_s^x)\, \mathrm{d}s \right|^2 \right) \\ &\leq \frac{2K^2}{r^2}(t + t^2) \end{aligned}$$

mit K Schranke für σ und b.
Wähle nun $\varepsilon > 0$ und t fix. Für r hinreichend groß ist der zweite Summand in (7.12) $\leq \varepsilon/2$. Für dieses r und x hinreichend groß ist auch der erste Summand in (7.12) $\leq \varepsilon/2$.
$\Rightarrow |P_t f(x)| \leq \varepsilon$. □

Satz 7.8.5. *Sei* $A := \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t - I)$ *der Generator der Feller-Halbgruppe* $(P_t)_{t\geq 0}$*, d.h.*

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{C}_0 : Af := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t f - f) \text{ existiert in } \mathcal{C}_0\}.$$

Dann ist $(A, \mathcal{D}(A))$ *eine Fortsetzung des Operators*

$$A_0 f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

mit $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$ *und* $a = \sigma\sigma^T$.
M.a.W.: $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$*, und für* $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$ *gilt:*

$$Af = A_0 f$$

Beweis. Mit Itô-Formel gilt für alle $f \in \mathcal{C}_c^2$:

$$\begin{aligned} f(X_t^x) &= f(x) + M_t + \sum_{i=1}^{d} \int \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s^x) b_i(X_s^x)\, \mathrm{d}s \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^x) \sigma_{ik}(X_s^x) \sigma_{jk}(X_s^x)\, \mathrm{d}s \\ &= f(x) + M_t + \int_0^t A_0 f(X_s^x)\, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$Af(x) = \lim_{t\to 0} \mathbf{E}\left[\frac{1}{t} \int_0^t A_0 f(X_s^x)\, \mathrm{d}s\right] \underset{\text{major. Konv.}}{=} A_0 f(x),$$

denn $\frac{1}{t}\int_0^t (A_0 f)(X_s^x)\, \mathrm{d}s \to (A_0 f)(x)$ $\mathbf{P}$-f.s. wegen Stetigkeit. $\square$

Korollar 7.8.6. *Unter obigen Voraussetzungen gilt:*

(i) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \mathbf{E}\left[(X_t^x - x)^{(i)}\right] = b_i(x)$

(ii) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \mathbf{E}\left[(X_t^x - x)^{(i)} \cdot (X_t^x - x)^{(j)}\right] = a_{ij}(x)$

Interpretation: Drift b entspricht der lokalen Geschwindigkeit bzw. der infinitesimalen Änderung des Erwartungswertes.
Diffusion a entspricht der infin. Änderung der Kovarianz.

Beweis. (i) Wähle $f_i(x) = x_i$ für $i = 1, \dots, d$:

$$\Rightarrow b_i(x) = Af_i(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t f_i(x) - f_i(x)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\mathbf{E}\left((X_t^x - x)^{(i)}\right).$$

(ii) Wähle $f_{ij}(x) = (x_i - y_i)(x_j - y_j)$ für fixes $y \in \mathbb{R}^d$ und $i, j = 1, \dots, d$:

$$\begin{aligned}\Rightarrow a_{ij}(y) &= Af_{ij}(y)\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t f_{ij}(y) - f_{ij}(y))\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\mathbf{E}\left((X_t^y - y)^{(i)}(X_t^y - y)^{(j)}\right).\end{aligned}$$

□

Beispiel 7.8.7. für schw. Lsg von SDG (Time change $\sigma \rightsquigarrow 1$).
Seien $d = 1$, $0 < \lambda \le |\sigma(x)| \le \frac{1}{\lambda}$ $(\forall x)$, σ messbar, $b \equiv 0$.
(Es genügen wesentlich schwächere Voraussetzungen an σ).
Betrachte SDG:

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\,\mathrm{d}W_t \quad \text{mit } \mathbf{P}\circ X_0^{-1} = \mu. \tag{7.13}$$

Lösung: Wähle beliebige 1-dim. BB $(\widetilde{X}_t)_{t\ge 0}$ mit $\mathbf{P}\circ \widetilde{X}_0^{-1} = \mu$.
Definier $\widetilde{W}$ mittels (7.13):

$$\widetilde{W}_t = \int_0^t \frac{1}{\sigma(\widetilde{X}_s)}\,\mathrm{d}\widetilde{X}_s.$$

$$\Rightarrow \langle\widetilde{W}\rangle_t = \int_0^t \frac{1}{\sigma^2(\widetilde{X}_s)}\,\mathrm{d}s \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\widetilde{X}_t = \sigma(\widetilde{X}_t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.$$

Sei T_0 Rechtsinverse zu $\langle\widetilde{W}\rangle_0$, d.h.

$$T_t = \inf\{s \ge 0 : \langle\widetilde{W}\rangle_s > t\}.$$

Sei $W_t := \widetilde{W}_{T_t}$, $X_t := \widetilde{X}_{T_t} \Rightarrow$ $\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\,\mathrm{d}W_t$ und $\langle W\rangle_t = \langle\widetilde{W}\rangle_{T_t} = t \Rightarrow W$ ist 1-dim BB und $\mathbf{P}\circ X_0^{-1} = \mu$.

Bemerkung 7.8.8. Statt $\sigma(x) \ge \lambda > 0$ genügt $\frac{1}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}$, $\sigma < \infty$.
Denn: Seien $f = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{1}_K$ und K kompakt.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbf{E}\left(\int_0^t f(X_s)\,\mathrm{d}s\right) &= \int_0^t \int p_s(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\\ &\le \int_0^t (2\pi s)^{-1/2}\,\mathrm{d}s \int f(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}\|f\|_1 < \infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow \int\limits_0^t f(X_s)\,\mathrm{d}s < \infty \quad$ f.s.
$\Rightarrow \int\limits_0^{t\wedge\tau_r} \frac{1}{\sigma^2(X_s)}\,\mathrm{d}s < \infty \quad$ f.s. $\quad (\forall t, \forall r)$
$\Rightarrow \int\limits_0^t \frac{1}{\sigma^2(X_s)}\,\mathrm{d}s < \infty \quad$ f.s. $\quad (\forall t)$

Lemma 7.8.9. *$\forall$ Feller-Halbgruppe $\exists$ Halbgruppe von Markov-Kernen*

Beweis. Riesz:
$x \mapsto P_t f(x) = \int k_t(x, \mathrm{d}y) f(y)$ stetig, also messbar $\forall f \in \mathcal{C}_0$
$\Rightarrow x \mapsto P_t f(x) = \int k_t(x, dy) f(y)$ messbar $\forall f \in \mathcal{B}_b$
$x \mapsto k_t(x, A)$ messbar $\forall A \in \mathcal{B}$ □

Definition 7.8.10. *Eine* Feller-Halbgruppe *ist eine Familie* $(P_t)_{t\geq 0}$ *von linearen Operatoren auf* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ *mit:*

- $P_s \circ P_t = P_{s+t} \quad (\forall s, t \geq 0)$
- *Positivität:* $f \geq 0 \Rightarrow P_t f \geq 0$
- *Normiertheit:* $|f| \leq 1 \Rightarrow |P_t f| \leq 1$
- *Stetig:* $P_t f \to f$ *für* $t \to 0$

Konservative Feller-Halbgruppe:

$$f \nearrow 1 \Rightarrow P_t f \nearrow 1.$$

Lemma 7.8.11. *Äquivalent sind:*

(i) *Konservative Feller-Halbgruppe [Feller-Halbgruppe]*

(ii) *Markov-Halbgruppe auf* $\mathbb{R}^d$ *[Markov-Halbgruppe auf* $\widehat{\mathbb{R}}^d$*]*
mit $P_t f \in \mathcal{C}_0 \quad (\forall f \in \mathcal{C}_0)$ *und* $P_t f \to f$

Beweis. Z.z.: $P_t f \to f$ pkt. $\quad$ (1)
$\Rightarrow P_t f \to f$ glm. $\quad$ (2)

(i) Ann. (1). Zeige zunächst:
Beh. (2) gilt $\forall f = \alpha U_\alpha g, g \in \mathcal{C}_0, \alpha > 0$

$$U_\alpha g = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha t} P_t g\,\mathrm{d}t \qquad \text{Resolvente}$$

Dabei gilt: Wegen (1) + Halbgruppen-Eigenschaft ist $t \mapsto P_t g(x)$ rechtsstetig in t $(\forall x)$

$\Rightarrow (t,x) \mapsto P_t g(x)$ messbar in (t,x) auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$
$\Rightarrow u \mapsto U_\alpha g(x)$ messbar auf $\mathbb{R}^d$ und $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \alpha U_\alpha g(x) = g(x) \quad \forall x$
Für $x_n \to x \in \mathbb{R}^d$ gilt: $U_\alpha g(x_n) \to U_\alpha g(x)$ und für $x_n \to \infty$: $U_\alpha g(x_n) \to 0$
$\Rightarrow U_\alpha g \in \mathcal{C}_0$

(ii) Es gilt die Resolventengleichung („Fubini“): $\forall \beta > \alpha > 0$:

$$U_\alpha g - U_\beta g = (\beta-\alpha) U_\alpha(U_\beta g) = (\beta - \alpha) U_\beta(U_\alpha g)$$

$\Rightarrow$ Range $\mathcal{D} := U_\alpha(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d))$ unabhängig von α,

$$\|\alpha U_\alpha g\| \le \|g\|_\infty$$

(iii) Beh.: $\mathcal{D}$ ist dicht in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$
Riesz-Darstellungssatz $\Rightarrow$ Dual-Raum von $\mathcal{C}_0$ ist Raum der endl. Maße auf $\widehat{\mathbb{R}}^d$
Sei μ endl. Maß mit $\int f \,\mathrm{d}\mu = 0 \quad (\forall f \in \mathcal{D})$
$\Rightarrow \int f d\mu \underset{\text{major. Konv.}}{=} \lim\limits_{\alpha\to\infty} \int \alpha U_\alpha f d\mu = 0 \quad (\forall f \in \mathcal{C}_0)$
$\Rightarrow \mu = 0$

(iv) Mit Fubini: $\forall f \in \mathcal{C}_0$

$$P_t U_\alpha f(x) = e^{\alpha t} \int_t^\infty e^{-\alpha s} P_s f(x) \,\mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow \|P_t U_\alpha f - U_\alpha f\|_\infty \le \left(e^{\alpha t} - 1\right) \cdot \|U_\alpha f\|_\infty + e^{\alpha t} t \|f\|_\infty \quad \to 0 \text{ für } t \to 0$$

Also: $\forall g = U_\alpha f \in \mathcal{D}$:

$$\|P_t g - g\|_\infty \to 0 \quad \text{für } t \to 0$$

$\Rightarrow$ Wegen c): $\forall g \in \mathcal{C}_0 : \quad \|P_t g - g\|_\infty \to 0.$

□

<u>Doob- Transf.</u> Seien X_t BB. Sei $h \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$, $h > 0$ auf $\overline{D}, \Delta h = 0$ in D.
Setze $b(x) := \frac{\nabla h(x)}{h(x)}$
$\Rightarrow Z_t := \frac{h(X_t)}{h(X_0)} = \cdots = \exp \int_0^t b(X_s) \,\mathrm{d}s - \frac{1}{2} \int_0^t |b|^2(X_s) \,\mathrm{d}s \quad$ für $t < \tau_D$
$\Rightarrow$ Lsg. von $\left(\frac{1}{2}\Delta + b\nabla\right) u = 0, u = f$, ist geg. durch

$$u(x) = \mathbf{E}\left[f(X_\tau) h(X_\tau)\right] / h(x)$$

Beweis. 1) $\frac{h(X_\tau)}{h(X_0)} = Z_\tau = \dots$
2) Betrachte Transformation $f \mapsto fh, u \mapsto uh, \dots$
$\Rightarrow$ neuer Generator

$$\begin{aligned} Au = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}\Delta(uh)\right) &= \frac{1}{h}\left(h\frac{1}{2}\Delta u + \nabla h \nabla u + u\frac{1}{2}\Delta h\right) \\ &= \frac{1}{2}\Delta u + \frac{\nabla h}{h}\nabla u. \end{aligned}$$

□

Beispiel 7.8.12. $D = \mathbb{R}^d \backslash \{z\}, d \geq 3,$

$$h(x) = \frac{C_d}{\|x-z\|^{d-2}} \text{ harmonisch in } D, \text{ “Green-Funktion”}$$

$b(x) = \frac{\nabla h}{h}(x) = -(d-2)\frac{x-z}{\|x-z\|^2}$
Richtung: zu z
Betrag: $\frac{1}{\|x-z\|}$
Generator: $\frac{1}{2}\Delta + b\nabla$
Halbgruppe: $q_t(x,y) = p_t(x,y)\frac{h(y)}{h(x)}$. Es gilt:

$$\int q_s(x,y) \cdot q_t(y,z) \, \mathrm{d}y = \int p_s(x,y)\frac{h(y)}{h(x)} p_t(y,z)\frac{h(z)}{h(y)} \, \mathrm{d}y = q_{s+t}(x,y)$$

$$\int q_t(x,y) \, \mathrm{d}y = \int \frac{1}{h(x)} \underbrace{\int p_t(x,y)h(y) \, \mathrm{d}y}_{\leq h(x) \text{ wegen super-harmon. in } \mathbb{R}^d} \leq 1$$

auf D, sub-Markov
Beim Treffen von z wird der Prozess gekillt. z wird getroffen wegen Drift b.

Einige Wiederholungen:
Sei D offen, $\mathbf{E}[\tau_D] < \infty \quad (\forall x), u \in \mathcal{C}_h^2(\overline{D})$
$\Rightarrow u(x) = \mathbf{E}[u(X_{\tau_D})] - \mathbf{E}\left[\int\limits_0^{\tau_D} Au(X_s)ds\right]$
($\Rightarrow$ Darstell. für Dirichlet-, Poisson-, …)
Insbes. $u \geq 0$ auf $\partial D, Au \leq 0$ in $D \Rightarrow u \geq 0$ in D.

Sei $\mathbf{E}\tau_{B_R} < \infty \quad (\forall x, \forall B_R = B_R(0))$ und $u \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d), Au \geq 0$

$$\begin{aligned}
\underset{\text{maj. Konv.}}{\Rightarrow} u(x) &= -\mathbf{E}\left[\int_0^\infty Au(X_s)\,\mathrm{d}s\right] \\
&= -\int_0^\infty \mathbf{E}[(Au)(X_s)]\,\mathrm{d}s \\
&= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (Au)(y)p_t(x,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}s \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} (Au)(y)g(x,\mathrm{d}y).
\end{aligned}$$

<u>Achtung</u>: Falls $d \leq 2$: $\exists u \neq 0, u \in \mathcal{C}_0^2$ mit $\frac{1}{2}\Delta u \geq 0$ (Rekurrenz)
Ann. $u \neq 0$, d.h. $\exists \varepsilon > 0, D$ offen, $\neq \emptyset : \frac{1}{2}\Delta u \geq \varepsilon 1_D$

$$\Rightarrow \mathbf{E}\int_0^\infty Au(X_s)ds \geq \varepsilon \mathbf{E}\underbrace{\int_0^\infty \mathbb{1}_D(X_s)\,\mathrm{d}s}_{0+\infty \text{ f.s.}}$$

Falls $d \geq 3$:

$$g(x,\mathrm{d}y) = g(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \text{mit}$$

$g(x,y) = \int_0^\infty p_t(x,y)\,\mathrm{d}t = c_d \cdot \frac{1}{\|x-y\|^{d-2}}$
Also $\forall w \in \mathcal{C}_C : \exists! u \in \mathcal{C}_0^2 : -\frac{1}{2}\Delta u = w$
Hierfür $u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} w(y)g(x,y)\,\mathrm{d}y = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty w(X_s)\,\mathrm{d}s\right]$.

7.9 Die starke Markov Eigenschaft

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ W-Raum, der den üblichen Bedingungen genüge, (W_t) BB.
Seien b, σ und (X_t) Lösung der SDG (rechtsstetig in t!). $(P_t)_{t\geq 0}$ Feller-Halbgruppe auf $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.
Verwende:

- Elementare ME
$$\mathbf{E}[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t] = P_s f(X_t)$$
- $X.$ rechtsstetig, Feller-Stetigkeit: $f(\cdot), P_t f(\cdot)$

Satz 7.9.1. *Unter den obigen Voraussetzungen gilt die starke Markov-Eigenschaft: Für jede Stoppzeit T, jedes $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ und jedes $s \geq 0$ gilt:*

$$\mathbf{E}\left[f(X_{T+s})|\mathcal{F}_T\right] = P_s f(X_T) \tag{7.14}$$

Bemerkung 7.9.2.

- Beide Seiten sind Zufallsvariablen.
- Auf $\{T = \infty\}$ ist $X_T := \infty \in \widehat{\mathbb{R}}^d \setminus \mathbb{R}^d$ mit $f(\infty) := 0$.
- (7.14) gilt ebenso für alle beschränkten, messbaren f (sowie für alle nichtnegativen, messbaren f), falls $T < \infty$ bzw. falls man $f(X_\infty) := 0$ setzt.
- Wegen $P_s f(x) = \mathbf{E} f(X_s^x)$ läßt sich die rechte Seite von (7.14) schreiben als
$$P_s f(X_T^x)(\omega_0) = \mathbf{E} f\left(X_s^{X_T^x(\omega_0)}\right)$$
- Es seien Ω der Standard-Pfadraum $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ und $\Theta_T : \Omega \to \Omega, \Theta_T(\omega) = (t \mapsto \omega(t + T(\omega)))$, der Shift-Operator. Ferner sei Y eine beschränkte und $\mathcal{F}^0$-messbare Z.V. Dann gilt:
$$\mathbf{E}\left[Y \circ \Theta_T | \mathcal{F}_T\right] = \mathbf{E}^{X_T}[Y]$$
(obige Gleichung (7.14): $Y = f(X_s)$)

Beweis. Sei $T_n := \frac{[2^n T]+1}{2^n}$. Dann: $T_n \searrow T$, T_n Stoppzeit mit Werten in $D = \{k \cdot 2^{-m} : k, m \in \mathbb{N}\}$ (dyadische Zahlen), $\mathcal{F}_T = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_{T_n})$.
Sei $\Lambda \in \mathcal{F}_T \Rightarrow \forall d \in D : \Lambda_d := \Lambda \cap \{T_n = d\} \in \mathcal{F}_d$. Anwend. der gewöhnlichen ME für $t = d$ liefert:

$$\begin{aligned}\int_{\Lambda_d} f(X_{d+s})\, \mathrm{d}\mathbf{P} &= \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_d} \cdot \mathbf{E}[f(X_{d+s})|\mathcal{F}_d]\right] \\ &\overset{\text{ME}}{=} \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_d} \cdot P_s f(X_d)\right]\end{aligned}$$

Aufsummieren der möglichen Werte von T_n liefert:

$$\int_\Lambda f(X_{T_n+s})\, \mathrm{d}\mathbf{P} = \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_\Lambda \cdot P_s f(X_{T_n})\right].$$

Die Stetigkeit von $x \longmapsto f(x)$ und $x \longmapsto P_s f(x)$ sowie die Rechtsstetigkeit von $t \longmapsto X_t$ liefern (für $n \to \infty$):

$$\int_\Lambda f(X_{T+s})\, \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_\Lambda P_s f(X_T)\, \mathrm{d}\mathbf{P}.$$

Da dies für alle $\Lambda \in \mathcal{F}_T$ gilt und $P_s f(X_T)$ $\mathcal{F}_T$-messbaren ist, folgt:

$$\mathbf{E}\left[f(X_{T+s})|\mathcal{F}_T\right] = P_s f(X_T).$$

□

Korollar 7.9.3. *Für jede Stoppzeit T ist $(\mathbf{P}^x, X_{T+t})_{x\in\mathbb{R}^d, t\geq 0}$ ein (starker) Markov-Prozess mit Übergangshalbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$.*

Beweis. Wende (7.14) an mit $T+t$ statt T:

$$\mathbf{E}\left[f(X_{T+t+s}|\mathcal{F}_{T+t})\right] = P_s f(X_{T+t})$$

$\mathbf{E}\left[f(X_{T+t+s}|\mathcal{F}_{T+t})\right] = \mathbf{E}\left[f(Y_{t+s})|\mathcal{G}_t)\right]$
$P_s f(X_{T+t}) = P_s f(Y_t)$
Also Prozess $Y_t := X_{T+t}$, Filtration $G_t = \mathcal{F}_{T+t}$, Halbgruppe (P_t) $\square$

8 BB und Dirichlet-Problem für den Laplace-Operator

8.1 BB als starker Markov-Prozess

Betrachte BB im $\mathbb{R}^d$ (vieles analog für allgem. Feller-Prozesse)
OBdA kanonisches Modell: $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, $X_t(\omega) = \omega(t)$ Proj., $\mathbf{P} = \mathbf{P}^0$ Wiener Maß für Start in $0 \in \mathbb{R}^d$
$\rightsquigarrow (X_t + x)_{t \geq 0}$ BB, startend in x (unter $\mathbf{P}^0$)
$\rightsquigarrow \mathbf{P}^x =$ Bildmaß von $\mathbf{P}^0$ unter Abb. $\omega \mapsto \omega + x$
$\rightsquigarrow (X_t)$ BB, startend in x unter $\mathbf{P}^x$
Sei $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$ (ohne Augmentierung)
Markov-Eigenschaft $\forall x, \forall s, t, \forall f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ gilt $\mathbf{P}^x$-f.s.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^x\left[f(X_{s+t})|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbf{E}^x\left[f(X_{s+t})|X_s\right] \\ &= \mathbf{E}^{X_s}[f(X_t)] \\ &= P_t f(X_s) \end{aligned}$$

(„Abh. von Vergangenheit=Abh. von Gegenwart“)
Vorletzter Term:
$\mathbf{E}^{X_s}[f(X_t)](\omega) = \int\limits_\Omega f(X_t(\omega'))\mathbf{P}^{X_s(\omega)}(\mathrm{d}\omega')$
Sei $\Theta_t : \Omega \to \Omega, (\Theta_t(\omega))(s) = \omega(s+t)$ Shift, messbar,
$\Rightarrow X_t \circ \Theta_s = X_{s+t}$
Markov-Eigenschaft: $\forall \mathcal{F}_\infty$-messbaren Z.V. $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ (beschränkt oder ≥ 0), $\forall s, \forall x$: $\mathbf{P}^x$-f.s.

$$\mathbf{E}^x\left[Z \circ \Theta_s|\mathcal{F}_s\right] = \mathbf{E}^x\left[Z \circ \Theta_s|X_s\right] = \mathbf{E}^{X_s}[Z].$$

Hieraus folgt starke Markov-Eigenschaft: $\forall$ Stoppzeiten S, $\forall t \geq 0$, $\forall f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, $\forall x$: $\mathbf{P}^x$-f.s. auf $\{S < \infty\}$:

$$\mathbf{E}^x\left[f(X_{S+t})|\mathcal{F}_S\right] = \mathbf{E}^x\left[f(X_{S+t})|X_S\right] = \mathbf{E}^{X_S}\left[f(X_t)\right] = P_t f(X_S)$$

und allgemein: $\forall$ Stoppzeiten S, $\forall Z \in \mathcal{B}_b(\Omega)$, $\forall x$: $\mathbf{P}^x$-f.s. auf $\{S < \infty\}$

$$\mathbf{E}^x\left[Z \circ \Theta_S|\mathcal{F}_S\right] = \mathbf{E}^x\left[Z \circ \Theta_S|X_S\right] = \mathbf{E}^{X_S}[Z].$$

(Bem: Statt $\mathbf{P}^x$ kann man auch $\mathbf{P}^\nu$ für bel. W-Maß ν auf $\mathbb{R}^d$ wählen.)

Beispiel 8.1.1. $Z = f(X_T)$ mit Stoppzeit T.

Definition 8.1.2. *Für alle Stoppzeiten T definiere man einen Sub-Markov-Kern (-Operator) durch:*

$$P_T(x, A) := \mathbf{P}^x(X_T \in A, T < \infty)$$
$$P_T(x) := \mathbf{E}^x[f(X_T) \cdot \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}].$$

Lemma 8.1.3. *Für alle Stoppzeiten S, T gilt:*

$$P_S \circ P_T = P_{S+T\circ\Theta_S}$$

Beweis. (i) $S + T \circ \Theta_S$ ist Stoppzeit.
„ = 1. Eintreffen von T nachdem S eingetroffen ist"

(ii) $f(X_T) \circ \Theta_S = f(X_T \circ \Theta_S) = f(X_{S+T\circ\Theta_S})$

(iii) Zur Vereinfachung: Es sei $S < \infty, T < \infty, S + T \circ \Theta_S < \infty$. Dann:

$$\begin{aligned}(P_S \circ P_T)f(x) &= \mathbf{E}^x[P_T f(X_S)] \\ &= \mathbf{E}^x[\mathbf{E}^{X_S}[f(X_T)]] \\ &\overset{\text{SME}}{=} \mathbf{E}^x[\mathbf{E}^x[f(X_T) \circ \Theta_S | \mathcal{F}_S]] \\ &= \mathbf{E}^x[f(X_T) \circ \Theta_S] \\ &\overset{2)}{=} P_{S+T\circ\Theta_S} f(x).\end{aligned}$$

□

8.2 Die Mittelwerteigenschaft

Definition 8.2.1. *Seien $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u : D \to \mathbb{R}$ messbar und λ^d-integr. (oder ≥ 0). Man sagt, dass u die Mittelwerteigenschaft besitzt, wenn für alle $\overline{B_r(x)} \subset D$ und für λ^1-f.a. $s < r$ gilt:*

$$u(x) = \int\limits_{\partial B_s(x)} u(y)\sigma_s(\mathrm{d}y).$$

Dabei bezeichne σ_s das norm. Oberflächenmaß auf $\partial B_s(x)$.

Bemerkung 8.2.2. Es gilt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_r(x)} u(y)\lambda(\mathrm{d}y) &= \int\limits_0^r \left[\int\limits_{\partial B_s(x)} u(y)\sigma_s(\mathrm{d}y)\right] \cdot c_n \cdot s^{n-1}\,\mathrm{d}s \\ &= u(x) \cdot \lambda(B_r(x)),\end{aligned}$$

d.h. $u(x) = \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int\limits_{B_r(x)} u(y)\lambda(\mathrm{d}y)\ \forall \overline{B_r}(x) \subset D$.

Proposition 8.2.3. *Es seien D offen, $f : \partial D \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt (oder ≥ 0), $u(x) := \mathbf{E}^x \left[f(X_{\tau_D}) 1_{\{\tau_D < \infty\}} \right]$ mit $\tau_D := \inf\{t \geq 0 : X_t \notin D\}$. Dann erfüllt u MWE in D, ist messbar und beschränkt (oder ≥ 0).*

Beweis. Sei $B' := B_r(x)$, $\overline{B} \subset D \Rightarrow \tau_B < \infty$ f.s. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \mathbf{E}^x \left[f(X_{\tau_D}) \right] \\
&= \mathbf{E}^x \left[\mathbf{E}^x \left[f(X_{\tau_D}) | \mathcal{F}_{\tau_B} \right] \right] \\
&= \mathbf{E}^x \left[\mathbf{E}^x \left[f(X_{\tau_D}) \circ \Theta_{\tau_B} | \mathcal{F}_{\tau_B} \right] \right] \\
&\overset{\text{SME}}{=} \mathbf{E}^x \left[\mathbf{E}^{X_{\tau_B}} \left[f(X_{\tau_D}) \right] \right] \\
&= \mathbf{E}^x \left[u(X_{\tau_B}) \right] \\
&= \int\limits_{\partial B} u(y) \sigma_r(\mathrm{d}y).
\end{aligned}$$

□

Proposition 8.2.4. *Es sei $u : D \to \mathbb{R}$ messbar, lokal integrierbar und erülle MWE. Dann gilt:*

$$u \in \mathcal{C}^\infty(D) \text{ und } \Delta u = 0 \text{ in } D.$$

(„Das heißt: u ist harmonisch.“)

Beweis. Sei $g_\varepsilon(s) := \begin{cases} c_\varepsilon \cdot e^{\frac{1}{s^2 - \varepsilon^2}} & , s < \varepsilon \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$
Dabei sei c_ε so gewählt, dass $\int g_\varepsilon(\|x\|) \lambda(\mathrm{d}x) = 1$ gelte.
Def. $u_\varepsilon(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} u(y) g_\varepsilon(\|x - y\|) \, \mathrm{d}y$: „Glättung von u“.
Für $D_\varepsilon := \{y : \overline{B_\varepsilon(y)} \subset D\}$ gilt: $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(D_\varepsilon)$.
Mit MWE folgt für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in D_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &= \int\limits_0^\varepsilon \left[\int\limits_{\partial B_s(x)} u(y) g_\varepsilon(s) \sigma_s(\mathrm{d}y) \right] c_n \cdot s^{n-1} \, \mathrm{d}s \\
&= u(x)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow u \in \mathcal{C}^\infty(D)$.
Zeige: $\Delta u = 0$ in D.
Taylor-Entwicklung in Umgebung von $\overline{B_r(x)} \subset D$:

$$u(y) = u(x) + \sum_i (y_i - x_i) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (y_i - x_i)(y_j - x_j) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + o(\|x - y\|^2)$$

Integration über $\partial B_r(x)$ gibt (wegen Antisymmetrie von $y_i - x_i$ und $(y_i - x_i)(y_j - x_j)$ für $i \neq j$):

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial B_r(x)} u(y)\sigma_r(\mathrm{d}y) &= u(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) \int\limits_{\partial B_r(x)} |y_i - x_i|^2 \sigma_r(\mathrm{d}y) + \sigma(r^2) \\ &= u(x) + \frac{r^2}{2d}\Delta u(x) + o(r^2).\end{aligned}$$

Mit MWE: $\int\limits_{\partial B_r(x)} u(y)\sigma_r(\mathrm{d}y) = u(x) \quad (\forall r)$ und daher $\Delta u(x) = 0$. □

Satz 8.2.5. *Für alle offenen Teilmengen $D \subset \mathbb{R}^d$, alle $f \in \mathcal{B}_b(\partial D)$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: Es sei $u(x) := \mathbf{E}^x\left[f(X_{\tau_D}) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_D < \infty\}}\right] + \alpha \cdot \mathbf{P}^x[\tau_D = \infty]$. Dann ist $u \in \mathcal{C}^\infty(D)$ und $\Delta u = 0$ in D.*

Beweis. Zunächst $\alpha = 0$. Dann gilt: $u \in \mathcal{B}_b(D)$, u erfüllt MWE. Daher folgt die Behauptung.
Für $\alpha \neq 0$: Setze $f \equiv \alpha$ auf ∂D. Dann ist

$$\alpha \cdot \mathbf{P}^x[\tau_D = \infty] = \alpha - \mathbf{E}^x\left[f(X_{\tau_D}) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_D < \infty\}}\right]$$

harmonisch. □

8.3 Randregularität

Definition 8.3.1. *Es seien $\tau_D := \inf\{t \geq 0 : X_t \notin D\}, \tau_D^* := \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}$*

Lemma 8.3.2. (i) *$\forall x \in D$: $\tau_D^* = \tau_D > 0 \quad \mathbf{P}^x$-f.s.*

(ii) *$\forall x \in \mathbb{R}^d \backslash \overline{D}$: $\tau_D^* = \tau_D = 0 \quad \mathbf{P}^x$-f.s.*
$\forall x \in \partial D$: $\tau_D = 0 \quad \mathbf{P}^x$-f.s.

(iii) *$\forall x \in \partial D$: $\mathbf{P}^x\{\tau_D^* = 0\} = 1$ oder $\mathbf{P}^x\{\tau_D^* = 0\} = 0$*

Beweis. (i), (ii) gelten wegen der Stetigkeit von X.
(iii) $\forall x \in \mathbb{R}^d$:

$$\{\tau_D^* = 0\} \in \mathcal{F}_{0+} \subset \mathcal{F}_0^{\mathbf{P}^x}$$

Nun gilt für alle $A \in \mathcal{F}_0^{\mathbf{P}^x} : \mathbf{P}^x(A) = 0$ oder $\mathbf{P}^x(A) = 1$ („Blumenthal'sches 0-1-Gesetz"), denn $\forall B \in \mathcal{F}_0 : \mathbf{P}^x(B) = 0$ oder $\mathbf{P}^x(B) = 1$ □

Definition 8.3.3. *$z \in \partial D$ heißt regulär (für BB in D), wenn gilt:*

$$\mathbf{P}^z\{\tau_D^* = 0\} = 1.$$

Andernfalls heißt z irregulär.

Bemerkung 8.3.4. (i) Irreguläre Randpunkte verhalten sich wie innere Punkte von D.

(ii) $\mathbf{P}^x\{X_{\tau_D} \in (\partial D)_{\text{irr}}\} = 0 \quad (\forall x \in D)$.

Beispiel 8.3.5. $d = 1$: Jeder Punkt $z \in \partial D$ ist regulär.
$d \geq 2$: $D = B_r(x_0)\backslash\{x_0\}$
$\Rightarrow x_0$ ist irregulär, da $\mathbf{P}^{x_0}$-f.s. gilt: $\tau_D^* = \tau_{B_r(x_0)} > 0$

Satz 8.3.6. *Seien $D \subset R^d$ offen, $d \geq 2$, $z \in \partial D$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\forall f \in \mathcal{B}_b(\partial D)$ *mit f stetig in z gilt:*

$$\lim_{x \to z, x \in D} \mathbf{E}^x \left[f(X_{\tau_D}) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_D < \infty\}} \right] = f(z). \tag{8.1}$$

(ii) $\forall f \in \mathcal{C}_b(\partial D)$ *gilt* (8.1)

(iii) $\tau_D^* = 0 \quad \mathbf{P}^z$*-f.s. („z ist regulär“)*

(iv) $\forall t > 0 : \lim\limits_{x \to z, x \in D} \mathbf{P}^x\{\tau_D > t\} = 0.$

Beweis. Es gilt: (i) $\Rightarrow$ (ii)
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei o.B.d.A. $\tau_D^* < \infty$ ($\mathbf{P}^x$-f.s. $\forall x$). Annahme: (iv) gelte nicht.
Dann folgt: $\mathbf{P}^z(\tau_D^* = 0) = 0$, ferner (wegen $d \geq 2$):

$$\lim_{r \searrow 0} \mathbf{P}^z(X_{\tau_D^*} \in B_r(z)) = \mathbf{P}^z(X_{\tau_D^*} = z) = 0.$$

Wähle $r > 0$ mit $\mathbf{P}^z(X_{\tau_D^*} \in B_r(z)) < \frac{1}{4}$ und setzte $r_n := 2^{-n}r$, $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : X_t \notin B_{r_n}(z)\}$
$\Rightarrow \mathbf{P}^z(\tau_n \searrow 0) = 1$
$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{P}^z(\tau_n < \tau_D^*) = 1$
Auf $\{\tau_n < \tau_D^*\}$ gilt: $X_{\tau_n} \in D$. Für n groß genug ist $\mathbf{P}^z(\tau_n < \tau_D^*) \geq \frac{1}{2}$ und daher:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4} &> \mathbf{P}^z(X_{\tau_D^*} \in B_r(z)) \\
&\geq \mathbf{P}^z(X_{\tau_D^*} \in B_r(z), \tau_n < \tau_D^*) \\
&= \mathbf{E}^z(\mathbb{1}_{\{\tau_n < \tau_D^*\}} \cdot \mathbf{E}^z(\mathbb{1}_{B_r(z)}(X_{\tau_D^*})|\mathcal{F}_{\tau_n})) \\
&\overset{\text{SME}}{=} \mathbf{E}^z(\mathbb{1}_{\{\tau_n < \tau_D^*\}} \cdot \mathbf{E}^{X_{\tau_n}}(\mathbb{1}_{B_r(z)}(X_{\tau_D^*}))) \\
&\geq \tfrac{1}{2} \cdot \inf_{x \in D \cap \partial B_{r_n}(z)} \mathbf{E}^x(1_{B_r(z)}(X_{\tau_D^*}))
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists x_n \in D \cap \partial B_{r_n}(z)$: $\mathbf{P}^{x_n}(X_{\tau_D^*} \in B_r(z)) < \frac{1}{2}$
Wähle $f \in \mathcal{C}_b(\partial D)$, $f \leq 1$, $f \equiv 0$ auf $\complement B_r(z)$, f stetig in z, $f(z) = 1$. Hierfür gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{n \to \infty}} \mathbf{E}^{x_n} f(X_{\tau_D}) &\leq \overline{\lim_{n \to \infty}} \mathbf{P}^{x_n}(X_{\tau_D} \in B_r(z)) \\
&\leq \frac{1}{2} < f(z)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Widerspruch zu (ii).
(iii) $\Rightarrow$ (iv): Für $0 < \delta < \varepsilon$ seien

$$g(x) := \mathbf{P}^x(X_s \in D \ \forall 0 < s \le \varepsilon) = \mathbf{P}^x(\tau_D^* > \varepsilon)$$

und

$$\begin{aligned} g_\delta(x) &:= \mathbf{P}^x(X_s \in D \ \forall \delta \le s \le \varepsilon) \\ &= \mathbf{E}^x[\mathbf{E}^{X_\delta}[\mathbb{1}_{\{\tau_D > \varepsilon - \delta\}}]] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{E}^y[\mathbb{1}_{\{\tau_D > \varepsilon-\delta\}}] p_\delta(x,y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

$\Rightarrow g_\delta$ ist $\mathcal{C}^\infty$,
$\Rightarrow g_\delta \searrow g$
$\Rightarrow \overline{\lim_{x \to z, x \in D}} \mathbf{P}^x[\tau_D > \varepsilon] = \overline{\lim_{x \to z, x\in D}} g(x) \le g(z) \overset{\text{(iii)}}{=} 0.$
(iv) $\Rightarrow$ (i): $\forall r > 0 \ \forall x$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^x(|X_{\tau_D} - x| < r) &\ge \mathbf{P}^x(\{\max_{0 \le t \le \varepsilon} |X_t - x| < r\} \cap \{\tau_D \le \varepsilon\}) \\ &\ge \underbrace{\mathbf{P}^0(\{\max_{0\le t\le\varepsilon} |X_t| < r\})}_{\to 1 \text{ für } \varepsilon \searrow 0} - \underbrace{\mathbf{P}^x\{\tau_D > \varepsilon\}}_{\to 0 \text{ für } \varepsilon \text{ fix, } x \to z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to z, x \in D} \mathbf{P}^x(|X_{\tau_D} - x| < r) = 1 \quad (\forall r > 0)$$

Falls f beschränkt auf ∂D und stetig in z ist, gilt:

$$\lim_{x \to z, x \in D} \mathbf{E}^x[f(X_{\tau_D})] = f(z).$$

□

Lemma 8.3.7 (Barriere-Kriterium)**.** *Seien D offen, beschränkt und $z \in \partial D$. Wenn eine "Barriere in z" existiert, d.h., wenn ein $u \in \mathcal{C}(\overline{D})$ existiert mit $\Delta u = 0$ in D, $u > 0$ in $\overline{D}\backslash\{z\}$ und $u(z) = 0$, dann ist z regulär.*

Beweis. Wir zeigen (ii) aus dem vorigen Satz: Geg. $f \in \mathcal{C}_b(\partial D)$ und $\varepsilon > 0$. Wähle δ mit $|f(x) - f(z)| < \varepsilon \ \forall x \in B_\delta(z) \cap \partial D$. Seien $M := \|f|_{\partial D}\|_\infty$ und $k := 2M / \inf_{x \in D \backslash B_\delta(z)} u(x) < \infty$.
$\Rightarrow |f(x) - f(z)| \le \varepsilon + k \cdot u(x) \quad (\forall x \in \partial D)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\mathbf{E}^y[f(X_{\tau_D})] - f(z)| &\le \varepsilon + k \cdot \mathbf{E}^y[u(X_{\tau_D})] \\ &= \varepsilon + k \cdot u(y) \quad (\forall y \in D) \end{aligned}$$

wegen $u \in \mathcal{C}(\overline{D}) \cap \mathcal{C}^2(D)$, $\Delta u = 0$ in D, D beschränkt.
Da u stetig ist und $u(z) = 0$ gilt, folgt:

$$\overline{\lim_{y \to z, y \in D}} |\mathbf{E}^y[f(X_{\tau_D})] - f(z)| \leq \varepsilon$$

und weil $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben ist, gilt schließlich:

$$\overline{\lim_{y \to z, y \in D}} |\mathbf{E}^y[f(X_{\tau_D})] - f(z)| = 0.$$

□

Satz 8.3.8. *(i) Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $z \in \partial D$ Endpunkt einer (einfachen) Kurve in $\mathbb{R}^2 \backslash D$. Dann ist z regulär.*
(ii) Insbesondere also: Ist D einfach zusammenhängend, so sind alle Punkte $z \in \partial D$ regulär.

Beweis. (i) Regularität ist lokale Eigenschaft. Daher sei oBdA $\overline{D} \subset B_1(0)$, $z = 0 \in \partial D$, γ Kurve mit $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 \in \complement B_1(0)$.
Betrachte die holomorphe Funktion $f(\xi) = -\frac{1}{\log \xi}$ auf $D \subset \mathbb{C}$ mit geeignetem Zweig des Logarithm.
$\Rightarrow u((x_1, x_2)) := \mathrm{Re} f(x_1 + ix_2)$ ist harmonisch in D, stetig auf $\overline{D}$, mit $u((0,0)) = 0$ und $u > 0$ auf $\overline{D} \backslash \{(0,0)\}$
$\Rightarrow (0,0)$ ist regulär. □

Beispiel 8.3.9. $d \geq 3$: Lebesgue'scher Dorn
Sei $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ strikt wachsend, $h(0) = 0$, $\frac{h(r)}{r}$ wachsend (für kleine r),
$D = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1 < 0 \text{ oder } h(x_1) < \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_d^2}\}$

Satz 8.3.10. 0 *ist regulär* $\Leftrightarrow$

$$\int_0^1 \left(\frac{h(r)}{r}\right)^{d-3} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \infty \quad (d > 3)$$

bzw.

$$\int_0^1 \left(\log \frac{h(r)}{r}\right)^{-1} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \infty \quad (d = 3).$$

Proposition 8.3.11. *$z \in \partial D$ ist regulär, falls eine äußere Kegelbed. erfüllt ist (Zaremba):*
$\exists y \in \mathbb{R}^d$, $|y| = 1$, $\exists \Theta \in]0, \pi[$, $\exists r > 0 : (z + C(y, \Theta)) \cap B_r(z) \subset \complement D$ mit $C(y, \Theta) := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \geq \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \Theta\}$

Beweis. OBdA sei: $z = 0$, $C(y, \Theta) \subset \complement D$.
$\Rightarrow \mathbf{P}^0[X_t \in C(y, \Theta)] = \frac{\text{Fläche}(\Theta)}{\text{Fläche}(\pi)} = c(\Theta)$
$\Rightarrow \mathbf{P}^0[\tau_D^* \leq t] \geq \mathbf{P}^0[X_t \in C(y, \Theta)] = c(\Theta) \quad (\forall t)$
$\Rightarrow \mathbf{P}^0[\tau_D^* = 0] \geq c(\Theta) > 0.$ □

8.4 Stochastisches Randverhalten

Satz 8.4.1. *Für alle $T_n \nearrow \tau_D$, $T_n \leq T_{n+1} < \tau_D$ gilt:*

$$u(X_{T_n}) \to f(X_{\tau_D}) \quad \mathbf{P}^x\text{-}f.s. \quad (\forall x \in D)$$

Beweis. Def. $M_\infty = f(X_{\tau_D})$, $M_n = u(X_{T_n})$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_n = u(X_{T_n}) &= \mathbf{E}^{X_{T_n}}[f(X_{\tau_D})] \\ &= \mathbf{E}^x[f(X_{\tau_D}) \circ \Theta_{T_n} | \mathcal{F}_{T_n}] \\ &= \mathbf{E}^x[M_\infty | \mathcal{F}_{T_n}] \end{aligned}$$

$\Rightarrow (M_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ ist Martingal (unter $\mathbf{P}^x$)
$\Rightarrow M_n \to M_\infty \quad \mathbf{P}^x$-f.s. □

Korollar 8.4.2. *Es gilt:* $\lim\limits_{t \nearrow \tau_D} u(X_t) = f(X_{\tau_D}) \quad \mathbf{P}^x$*-f.s.* $\quad (\forall x \in D)$

Korollar 8.4.3. $\forall f \in \mathcal{B}_b(\partial D)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*:* $\exists! u \in \mathcal{C}^\infty(D) \cap \mathcal{B}_b(D)$*:* $\Delta u = 0$ *in* D*,*
$\lim\limits_{t \nearrow \tau_D} u(X_t) = f(X_{\tau_D})$ *f.s. auf* $\{\tau_D < \infty\}$ *und*
$\lim\limits_{t \nearrow \tau_D} u(X_t) = \alpha$ *f.s. auf* $\{\tau_D = \infty\}$.

Korollar 8.4.4. $X_{\tau_D} \in (\partial D)_{reg} \quad \mathbf{P}^x$*-f.s.* $\quad (\forall x \in D)$

Satz 8.4.5. $\forall f \in \mathcal{C}_b(\partial D)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*:* $\exists! u \in \mathcal{C}_b(D) \cap \mathcal{C}^\infty(D)$*:* $\Delta u = 0$ *in* D*,*
$\lim\limits_{x \to \infty, x \in D} u(x) = \alpha$ *und*
$\lim\limits_{x \to \infty, x \in D} u(x) = f(z) \quad (\forall z \in (\partial D)_{reg})$.

Nämlich: $u(x) = \mathbf{E}^x[f(X_{\tau_D}) \cdot 1_{\{\tau_D < \infty\}}] + \alpha \cdot \mathbf{P}^x\{\tau_D = \infty\}$.
Nachtrag Schw. Lsg von SDG

Beispiel 8.4.6 (Drift Elimination $b \rightsquigarrow 0$)**.** Sei N beliebig, $b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ Borel-mb, beschränkt. Betrachte SDG

$$dX_t = b(X_t)dt + dW_t \tag{8.2}$$

Lösung: Wähle beliebige N-dim BB $(X_t)_t$ auf bel. filtr. W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ mit vorgeg. Startverteilung $\mathbf{P} \circ X_0^{-1} = \mu$.
Def. $W_t := X_t - \int\limits_0^t b(X_s)ds \quad (-X_0)$
(entsprechend (8.2)) sowie

$$Z_t = \exp\left(\int\limits_0^t b(X_s) \, \mathrm{d}X_s - \frac{1}{2} \int\limits_0^t \|b(X_s)\|^2 \, \mathrm{d}s \right).$$

Dann gilt nach Cameron-Martin-Girsanov-Maruyama:
$\forall T > 0$ ist $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ eine (stand.) BB auf dem filtr. W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{Q}_T, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T})$ mit $\mathbf{Q}_T = Z_T \cdot \mathbf{P}$. Daher ist $(X, W)_{0 \leq t \leq T}$ eine schwache Lösung der SDG (8.2).

Bemerkung 8.4.7. Statt b beschränkt reicht nach Novikov:

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \|b(X_s)\|^2 \,\mathrm{d}s\right)\right) < \infty \quad (\forall t)$$

Hierfür wiederum genügt nach Lemma von Khas'minskir:

$$\lim_{t\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbf{E}^x\left(\int_0^t \|b(X_s)\|^2 \,\mathrm{d}s\right) < 1.$$

(Hierbei bezeichnet$\mathbf{E}^x$ Erw. einer in x startenden BB (X_t)).

Beispiel 8.4.8. Falls $|b(x)| \leq C_1 + C_2 \cdot \frac{1}{|x|^\alpha}$ mit $\alpha < 1$ gilt, so sind diese Bedingungen erfüllt.

<u>Allgemeine Drift-Elimination:</u>
Betrachte SDG

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}W_t, \tag{8.3}$$

b beschr., Borel-mb: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, σ, σ^{-1} beschr., Borel-mb: $\mathbb{R}^{N\times N} \to \mathbb{R}$
<u>Annahme:</u> Es existiert schwache Lösung (X, V) (auf geeign. filtr. W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{F}_t)))$ zu vorgeg. Anfangsbed. $\mathbf{P} \circ X_0^{-1} = \mu$, Lösung von

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\,\mathrm{d}V_t, \quad V \text{ BB} \tag{8.4}$$

(„driftfreie Gleichung“)
Def. $W_t := V_t - \int_0^t (\sigma^{-1}b)(X_s)\,\mathrm{d}s$ und
$Z_t := \exp\left(\int_0^t (\sigma^{-1}b\sigma^{-1})(X_s)\,\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma^{-1}b\|^2(X_s)\,\mathrm{d}s\right)$.
Dann ist (X, W) schw. Lsg. der SDG (8.3) auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{Q}_T, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T})$ mit $\mathbf{Q}_T = Z_T \cdot \mathbf{P}$.

Beweis. (i) (X, W) löst die SDG (8.3), denn

$$\begin{aligned}\sigma(X_s)\,\mathrm{d}W_t &= \sigma(X_s)\,\mathrm{d}V_t - \sigma(X_s)(\sigma^{-1}\cdot b(X_s))\,\mathrm{d}s\\ &= \sigma(X_s)\,\mathrm{d}V_t - b(X_s)\,\mathrm{d}s\\ &= \mathrm{d}X_t - b(X_s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

(ii) W ist BB unter $\mathbf{Q}_T$, denn
$W_t = V_t - \int_0^t A_s\,\mathrm{d}s$,
$Z_t = \exp\left[\int_0^t A_s\,\mathrm{d}V_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|A\|^2\,\mathrm{d}s\right]$ mit $A_s = \sigma^{-1}(X_s)b(X_s)$,
$\Rightarrow Z_t = \exp\left[\int_0^t (\sigma^{-1}b\sigma^{-1})(X_s)\,\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma^{-1}b\|^2(X_s)\,\mathrm{d}s\right]$.

□

Index