A) Stoch. Prozesse, Filtrationen und Stoppzeiten.

A.1) Brownsche Bewegung

- (Def. 1.3): Eine 1-d Brownsche Bewegung ist ein reellwertigen Prozess $(B_t)_{t\geq 0}$ mit:
  - ⓐ Für $0=t_0\leq t_1\leq\dots\leq t_n$, sind die Zufallsvariablen $B_{t_{j+1}}-B_{t_j}$, $j=0,\dots,n-1$, unabhängige.
  - ⓑ Für $s,t\geq 0$, dann $$\mathbb{P}(B_{s+t}-B_s\in A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_A e^{-\frac{x^2}{2t}}dx,\ \forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}).$$
  - ⓒ $t\mapsto B_t$ ist stetig.

- Eigenschaften:
  - (Thm. 2.5) $t\mapsto B_t$ sind f.s. nirgendwo Ableitbar, und haben f.s. unbeschränkte Variation.
  - (Kor. 2.15) $\exists$ Modifikation von BB, die γ-Hölder stetig für $\gamma\in(0,1/2)$ ist.

- (Def. 2.11): Zwei stoch. Prozesse X, Y sind:
  - Modifikationen voreinander, falls: $\mathbb{P}(X_t=Y_t)=1,\ \forall t\geq 0$,
  - Ununterscheidbar, falls: $\mathbb{P}(X_t=Y_t,\ \forall t\geq 0)=1$.

$\Rightarrow$ Deshalb kann man in ⓒ eine stetige Version nehmen.

A.2) Filtrationen

- (Def. 3.1). Filtration: eine nichtfallende Familie $\{\mathcal{F}_t,\ t\geq 0\}$ von σ-Algebren von $\mathcal{F}$ (d.h., $\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$, $0\leq s<t<\infty$).
- (Def. 3.2). Filtrierter W-raum: $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$ mit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration.
- (Def. 3.5) Standard (filtrierter) W-Raum: $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$, falls die Filtrierung vollständig (alle $(\mathcal{F},\mathbb{P})$-Nullmenge sind in $\mathcal{F}_0$) und rechtsstetig ($\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$).

- (Def. 3.6) Sei $\mathcal{F}_t^X$ die von X erzeugte Filtration ($\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$)
  $\Rightarrow$ X ist an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert, wenn
  $$\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0, \text{ d.h.,}$$
  X_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar, $\forall t \geq 0$.

- (Def. 3.7): X_t progressiv messbar bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\forall t \geq 0$
  $$X : (s,\omega) \longmapsto X_s(\omega) \text{ ist messbar bzgl. } \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t.$$

A.3) Stoppzeiten:

- (Def. 3.9) $T : \Omega \to [0,\infty]$ Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\forall t \geq 0$,
  $$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

- Eigenschaften: (Prop. 3.10 (a)) Jede Konstante ist eine Stoppzeit.
  (Prop. 3.10 (d)) T Stoppzeit $\Leftrightarrow$ $X_t = \mathbb{1}_{[0,T)}(t)$ ist adaptiert.
  (Prop. 3.11 (b)) S, T Stoppzeiten $\Rightarrow$ $S \wedge T$, $S \vee T$, $S + T$ Stoppzeiten

- Beispiel: $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, X_t adaptiert, rechtsstetig.
  $$T_A(\omega) := \inf\{t \geq 0 \mid X_t(\omega) \in A\}, \quad \inf\{\emptyset\} = \infty \ (\text{Eintrittszeit})$$
  $\Rightarrow$ A geschlossen ~~und~~ X stetig $\Rightarrow$ T_A Stoppzeit.
  $\Rightarrow$ Jede Stoppzeit ist eine Eintrittszeit.

- Def. X progr. messbar bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, T Stoppzeit.
  $\Rightarrow$ Gestoppte Prozess: $X^T : (t,\omega) \longmapsto X_{T(\omega)\wedge t}(\omega)$.

B) Martingale, Semimartingale.

B.1) Martingale

Def. 4.3/4/5) • X **submartingal** bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ falls:
- X adaptiert, $X_t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(X_t^+) < \infty$, und $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$ f.s. für $0 \leq s < t$.
- X **supermartingal**, falls $-X$ submartingal.
- X **Martingal**, falls $X, -X$ submartingal, d.h., $\mathbb{R} \ni X$ adaptiert, $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$, $\forall\, 0 \leq s \leq t$:

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s \quad f.s.$$

• Eigenschaften: (Prop 4.7(a)) X, Y Martingale, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow X+Y, X-Y, \alpha X$ Martingale.

(Prop. 4.7(b)) X Martingal, φ konvex s.d. $\varphi(X_t) \in L^1$ $\Rightarrow (\varphi(X_t))_{t\geq 0}$ submartingal.

• Doob's Maximal Inequality: $\forall\, p > 1$, mit $(X_t)_{t\geq 0}$ submartingal mit ~~jede~~ Trajektorie rechtsstetig, $[\sigma, \tau] \subset [0, \infty)$, dann

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{1-p}\right)^p \cdot \mathbb{E}(X_\tau^p).$$

• Konvergenzsatz: (Thm 4.11) $(X_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetiges Submartingal, mit $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(X_t^+) < \infty$, dann $\exists$ f.s. eindeutig

$$X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t \quad f.s.$$

(Kor 4.12) $(X_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetiges, ≥ 0 Supermart. $\Rightarrow X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$ f.s. (existiert eindeutig)

• Optional sampling: ~~Idee: Erweitert auf S, T stoppzeiten z.B.~~ ~~$\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S) = X_S$ f.s. für Martingal~~, wenn ~~$S \leq T$ f.s.~~

. (Thm. 4.13(d)): Für Martingale, $\exists X_\infty \in L^1$ s.d.
$X_t = \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t)$, $\forall t \geq 0$, f.s.

. Optional Sampling:
("Erweitert" die Def.^n auf Stoppzeiten).
. $S \leq T$ Stoppzeiten, X Martingal
$\Rightarrow X_S = \mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_S)$ f.s.,
insbesondere: $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

B.2) Semimartingale:

. (Def. 5.1) . $X \in \mathcal{A}$: Stetig, endlicher Variation, adaptiert.
. $X \in \mathcal{M}$: Stetiges Martingal.
. $X \in \mathcal{M}_{loc}$: stetiges, lokales Martingal: adaptiert und
$\exists$ Stoppzeiten T_n, $n \geq 1$ s.d. $T_n \nearrow \infty$ f.s.,
X^{T_n} Martingal.

. Eigenschaften: Lem 5.3(c): $X \in \mathcal{M}_{loc}$ und beschränkt $\Rightarrow X \in \mathcal{M}$
Lem 5.3(b). $X \in \mathcal{M}_{loc}$, $X \geq 0 \Rightarrow X$ Supermart.

(Def. 5.4) . $X \in \mathcal{S}$: Semimartingal, falls $\exists M \in \mathcal{M}_{loc}$, $A \in \mathcal{A}$ s.d.
$X = M + A$.

. Eigenschaft: (Thm 5.5) $\mathcal{M}^0_{loc} = \mathcal{M}_{loc} \cap \{X_0 = 0\}$
$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M}^0_{loc} \cap \mathcal{A} = \{0\}} \Rightarrow \mathcal{S} = \mathcal{M}_{loc} \oplus \mathcal{A}$.

. Doob-Meyer Zerlegung: (Thm. 5.6)
. X stetiges Supermartingal
$\Rightarrow \exists!\, M \in \mathcal{M}^0_{loc}$, $A \in \mathcal{A}^+$ s.d.
$\boxed{X_t = M_t - A_t}$

B.3) Quadratische Variation.

. Thm 5.10 ⓐ ⓑ: • $\forall M \in \mathcal{M}_{loc}, \exists! \langle M \rangle \in \mathcal{A}_0$ s.d. $M^2 - M_0^2 - \langle M \rangle \in \mathcal{M}^0_{loc}$

• $\forall M, N \in \mathcal{M}_{loc}, \exists! \langle M, N \rangle \in \mathcal{A}_0$ s.d.

$M \cdot N - M_0 N_0 - \langle M, N \rangle \in \mathcal{M}^0_{loc}$.

(Def 5.9 bis) $\begin{cases} \cdot \langle M \rangle \doteq \text{quadratische Variation von } M \\ \cdot \langle M, N \rangle \doteq \text{" Kovariation von } M \text{ und } N. \end{cases}$

. Eigenschaften: (Lem. 5.11): $\begin{cases} \langle M, N \rangle^T = \langle M^T, N^T \rangle, \ \forall \text{ stopp. } T. \\ \cdot \langle M \rangle = 0 \iff M \text{ Konstant} \end{cases}$

(Lem 5.15): $\begin{cases} \forall a < b, \ \langle M \rangle_a(\omega) = \langle M \rangle_b(\omega) \ \omega\text{-f.s.} \\ (\Longleftrightarrow) \ M_t(\omega) = M_a(\omega) \ \forall t \in [a,b]. \end{cases}$

B.4) L^2-beschränkte Martingale

(Def. 5.19) • $H^2 := \{ M \in \mathcal{M} \mid \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(M_t^2) < \infty \}$

Eigenschaften (Prop 5.20) $\begin{cases} \bullet \ H^2 \text{ Hilbert Raum bzgl. Norm} \\ \quad \|M\|_{H^2} := \sqrt{\mathbb{E}(M_\infty^2)} \\ \bullet \text{ Für } M \in H_0^2 = H^2 \cap \{M_0 = 0\}, \\ \quad \|M\|_{H^2} = \sqrt{\mathbb{E}(\langle M \rangle_\infty)} \end{cases}$

(e.g., Itô-Integral).

© Stochastische Integral und Itô-Formel.

C.1) Für $A \in \mathcal{A}$: . (Prop 6.3) g rechtsstetig, wachsend, f linksstetig, lokal beschränkt.

$$\Rightarrow \int_0^t f\,dg = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\left(g(t_{k+1}) - g(t_k)\right).$$

wobei Δ = partition $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = t$.

. $X \in \mathcal{B}$: adaptiert, linksstetig, pfadweise lokal beschränkt.

(Def. 6.4) $A \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{B}$ $\Rightarrow$ Pfadweise definiert man:

$$(X \cdot A)_t(\omega) = \int_0^t X_s(\omega)\,dA_s(\omega)$$

Eigenschaften: (Thm 6.5): . $A \in \mathcal{A}$, $X, Y \in \mathcal{B}$, T stoppzeit:

$$\begin{cases} \cdot\ X \cdot A \in \mathcal{A}_0 \\ \cdot\ X \cdot A \text{ bilinear} \\ \cdot\ (X \cdot A)^T = X \cdot A^T \\ \cdot\ Y \cdot (X \cdot A) = (Y \cdot X) \cdot A \end{cases}$$

C.2) Itô-Integral: Probleme: $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{t_k})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$ existiert pfadweise nicht

. $f(B_{t_k})$ oder $f(B_{t_{k+1}})$? $\to$ Anders

ⓐ Auf Elementar Prozesse $\mathcal{E}$: $X_t(\omega) = \xi_0(\omega)\mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k \geq 0} \xi_k(\omega)\mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(t)$,

(Def. 6.8):
$$\begin{cases} M \in H^2, X \in \mathcal{E} \\ \Rightarrow \int_0^t X_s\,dM_s \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \left(M_{t_{k+1} \wedge t} - M_{t_k \wedge t}\right). \\ \text{(Pfadweise definiert)} \end{cases}$$

Eigenschaften:
$$\begin{cases} \cdot\ X \cdot M \in H_0^2 \quad (\Rightarrow \text{Martingal}) \\ \cdot\ \langle X \cdot M \rangle_t = (X^2 \cdot \langle M \rangle)_t \\ \cdot\ \text{Isometrie: } \|X \cdot M\|_{H^2}^2 = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty X_s\,dM_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty X_s^2\,d\langle M \rangle_s\right). \end{cases}$$

Eigenschaften: (Prop 6.11) · $M, N \in H^2$, $X, Y \in \mathcal{E}$

(KW) $\Rightarrow \langle X \cdot M, Y \cdot N \rangle_t = ((XY) \cdot \langle M, N \rangle)_t$

(b) Erweiterung zu $X \in L^2(M)$:

(Def. 6.15) $L^2(M)$ = Äquivalenzklassen von $\mathcal{L}^2(M)$ bzgl. $\|\cdot\|_M$,

wobei $\mathcal{L}^2(M) = \{ X$ vorhersagbar, d.h. $X \in \sigma(\mathcal{E})$, mit

$$\|X\|_M \equiv \sqrt{\mathbb{E}\left(\int_0^\infty X_t^2 \, d\langle M \rangle_t\right)} < \infty \}.$$

· (Thm 6.17) Für $X \in L^2(M)$, $\exists!\ (X \cdot M) \in H_0^2$ s.d.

für alle Folge $(X^n)_{n \geq 1}$, $X^n \in \mathcal{E}$ s.d. $\|X - X^n\|_M \to 0$,

$\|X \cdot M - X^n \cdot M\|_{H^2} \to 0$.

(Def. 6.18) Für $X \in L^2(M)$, $X \cdot M$ ist der einzige Prozess von Thm 6.17

· Schritte:

ⓐ Approximiere $X \in L^2(M)$ mit $X^n \in L^2(M) \cap \mathcal{E}$

s.d. $\|X - X^n\|_M = \sqrt{\mathbb{E}\left(\int_0^\infty |X_t - X_t^n|^2 d\langle M \rangle_t\right)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

ⓑ Itô-Isometrie auf ~~Vorhandene Folge X^n, n~~ Cauchy-Folge in $\mathcal{E}$:

$$\|X^n - X^m\|_M = \|X^n \cdot M - X^m \cdot M\|_{H^2} \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow (X^n \cdot M)_{n \geq 1}$ Cauchy-Folge in H^2.

· Eigenschaften: Wie bei Elementarprozesse, insbesondere die KW-Identität, Isometrie, Assoziativität, $X \cdot M \in H_0^2 \Rightarrow$ Martingal.

C.3) Durch Lokalisierung $\Rightarrow$ Erweiterung auf lokale Martingale (und Semimartingale).

· (Prop. 6.22): $\left\{ \cdot\, X \in L^2(M),\ T \text{ Stoppzeit} \Rightarrow (X \cdot M)^T = X \cdot M^T = (X \mathbb{1}_{[0,T]}) \cdot M \right.$

$\Downarrow$

(Def. 6.26(a)) · Für $M \in \mathcal{M}_{loc}$, $X \in L^2_{loc}(M)$, $X \cdot M := \lim_{n\to\infty} X \cdot M^{T_n}$.

($L^2_{loc}(M)$ = Äquiv. Klassen von $\mathcal{L}^2_{loc}(M) = \{X$ vorhers., $\mathbb{P}(\int_0^t X_s^2\, d\langle M\rangle_s(\omega) < \infty) = 1$ $\forall t \in [0,\infty)\}$.)

C.4) Itô-Formel:

· (Thm 6.30) Partielle Integration:

$$\forall\, X, Y \in S, \quad X_t \cdot Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dX_s + \langle X, Y\rangle_t.$$

· Beispiel: $B_t^2 = 2\int_0^t B_s\, dB_s + t$.

· (Thm 7.1) Itô-Formel: $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $X = (X^1, \dots, X^d)$, $X^k \in S$.

$\Rightarrow F(X) \in S$ mit

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t \partial_k F(X_s)\, dX_s^k + \sum_{k,\ell=1}^d \frac{1}{2}\int_0^t \partial_k \partial_\ell F(X_s)\, d\langle X^k, X^\ell\rangle_s$$

$\rightarrow$ Particularize for X eine d-dim. B.B. oder $X_t = (t, B_t^1, \dots, B_t^d)$.

· Beweisidee: · Partielle Integration $\Rightarrow$ Für Polynome, dann Weierstrass Approx $\Rightarrow C_0^2$, letztlich Stoppzeiten.

(Kor 7.4) $\cdot \langle F(B)\rangle_t = \int_0^t (\nabla F)^2 (B_s)\,ds.$

~~(5) Exp. lo.~~

(Prop 7.6)ⓐ B eine d-dim. B.B., $f \in C^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, und

$$Af = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta f.$$

$$\Rightarrow f(t,B_t) - f(0,B_0) - \int_0^t Af(s,B_s)\,ds \in M^0_{loc}.$$

C.5) Exponentielles lokales Martingal

(Lem 7.9) $\cdot F \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\mathbb{R})$ und $\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, $M \in M_{loc}$

$\Rightarrow \tilde{M}_t := F(\langle M\rangle_t, M_t) \in M_{loc}.$

.(Def 7.10) $\cdot \lambda \in \mathbb{C}$, $M \in M_{loc} \Rightarrow \mathcal{E}_\lambda(M)_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_t\right)$: exponentielles lokales Martingal.

.Eigenschaften: (Thm 7.12) $\mathcal{E}_\lambda(M)$ Martingal, [redacted] in die folgenden Fälle:

ⓐ M beschränkt und $\lambda \in \mathbb{R}$

ⓑ $\langle M\rangle$ " , $\lambda \in i\mathbb{R}$

ⓒ $M_0 = 0$, $\mathbb{E}(\mathcal{E}_\lambda(M)_t) = 1$, $\forall t \geq 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

C.6) Lévy Charakterisierung

.(Thm 7.13) $\cdot X_t \in \mathbb{R}^d$, $\boxed{\text{stetig}}$, $\mathcal{F}_t$-adaptiert, $X_0 = 0$.

$\cdot$ X eine d-dim. B.B. bzgl. $\mathcal{F}_t$

$\Longleftrightarrow X \in M^0_{loc}$ und $\langle X^k, X^e\rangle_t = \delta_{k,e}\cdot t$, $1 \leq k, e \leq d$.

.Korollar 7.14/15) $\cdot X \in M^0_{loc}$ mit $\langle X\rangle_t = t \Rightarrow X$ BB (1-d)

$\cdot X \in M^0_{loc}$ und $X_t^2 - t \in M_{loc} \Rightarrow X$ BB.

.Ist "stetig" nötig? Ja!

10) Beispiele: (a) Brownsche Brücke: $\cdot\, X_t = \begin{cases} (1-t)\, B_{\frac{t}{1-t}}, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t = 1 \end{cases}$

$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{dW_s}{1-s} \longleftarrow \begin{cases} \cdot\, \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = (1-t)\cdot s \quad \text{für } 0 \le s < t \le 1. \\ \cdot\, \langle X\rangle_t = t \quad ; W_t := X_t + \int_0^t \frac{X_s}{1-s}\, ds \in M_{loc}, \\ \langle W\rangle_t = t. \\ \cdot\, dX_t = -\frac{X_t}{1-t}\, dt + dW_t \end{cases}$$

(b) Ornstein-Uhlenbeck: $\cdot\, X_t = \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}}\cdot B_{e^{2\lambda t}}$.

$$X_t = X_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\, dW_s \longleftarrow \begin{cases} \cdot\, \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \frac{1}{2\lambda}\exp(-\lambda|t-s|) \\ \cdot\, \langle X\rangle_t = t. \\ \cdot\, W_t := X_t - X_0 - \lambda\int_0^t X_s\, ds \in M_{loc}, \\ \langle W\rangle_t = t. \\ \cdot\, dX_t = -\lambda X_t\, dt + dW_t \end{cases}$$

(c) Bessel Prozesse: $\cdot\, R_t = \|B_t\|_2$ (B_t: d-dim BB).

$\cdot\, dR_t = \frac{d-1}{2R_t}\, dt + dW_t$

wobei $\cdot\, W_t = \sum_{k=1}^d \int_0^t \frac{B_s^k}{R_s}\, dB_s^k$: 1-d BB.

(D) BB mit Drift: $\begin{cases} \boxed{X_t = v t + \sigma W_t} \\ \cdot\, \mathrm{Cov}(X_t^i, X_t^j) = \sigma^2 t\, \delta_{ij} \\ \begin{cases} dX_t = v\, dt + \sigma\, dW_t \\ X_0 = 0 \end{cases} \end{cases}$

(E) Geom. BB: $\begin{cases} dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t\, dW_t \\ X_0 = x > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow X_t = x\cdot\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \sigma W_t\right)$.

D) SDE und Feynman-Kac

D.1) SDE: starke Lösungen: $X_t \in \mathbb{R}^d$ mit

$$(*) \begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dW_t \\ X_0 = \xi \end{cases},$$

Drift

Dispersion

Anfangsbedingung

Def. 8.2) . Starke Lösung von $(*)$:
- $X_0 = \xi$ f.s.
- X adaptiert an $\mathcal{F}_t$ = Augm. von $\sigma(\xi, W_s, 0 \le s \le t)$.
- X stetiges Semimart. mit $\int_0^t (\|b(s,X_s)\| + \|\sigma(s,X_s)\|^2)\,ds < \infty$ f.s.
- $X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dW_s$, $0 \le t < \infty$ f.s.

Thm 8.4) . Wenn b und σ lokal Lipschitz-stetig in x, dann gilt starke Eindeutigkeit (i.e., up to ununterscheidbarkeit).

Thm 8.6) . Sei $\mathbb{E}(\|\xi\|^2) < \infty$. Wenn $\exists\, K > 0$ s.d.:
(global Lipschitz) $\forall t \ge 0, x, y \in \mathbb{R}^d$, $\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \le K\|x - y\|$
(lin. Wachst.) $\|b(t,x)\| + \|\sigma(t,x)\| \le K(1 + \|x\|)$.
$\Rightarrow \exists!$ starke Lösung von $(*)$ (und $\forall T > 0, \exists\, C_T > 0$ s.d. $\mathbb{E}(\|X_t\|^2) \le C_T(1 + \mathbb{E}(\|\xi\|^2))$, $0 \le t \le T$).

Beweisidee: . Fix-punkt Iteration

$$\begin{cases} X_t^{(0)} = \xi \\ \Psi(X_t) = \xi + \int_0^t b(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dW_s \\ X_t^{(k+1)} := \Psi(X_t^{(k)}). \end{cases}$$

D.2) Feynman-Kac:

$$(\circledast)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u - k(x)u & , x \in \mathbb{R}^d. \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

(Kor 9.3) $\begin{cases} \cdot f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ k: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+ \text{ stetig}. \\ \cdot u \in C^{1,2} \text{ auf } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \text{ löst } (\circledast). \end{cases}$

$\Rightarrow$ Wenn $\forall T \in (0,\infty), \exists K_T > 0,\ a \in (0, \frac{1}{2T\cdot d})$ s.d.

$$\max_{0 \le t \le T} |u(t,x)| \le K \cdot e^{a\|x\|^2}, x \in \mathbb{R}^d$$

$$\Rightarrow u(t,x) = \mathbb{E}^x\left(f(W_t)e^{-\int_0^t k(W_s)ds}\right)$$

E) Brownsche Martingal.

(Def 10.3) $\Big\{$. Zeitwechsel $(T_t)_{t\geq 0}$ ist ein wachsender, rechtsstetiger Prozess $T: \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mit T_t Stoppzeit, $\forall t \geq 0$.

(Def 10.5). $(X_t)_{t\geq 0}$ adaptiert, $X_t \in \overline{\mathbb{R}}$.

$\hat{X}_t := X_{T_t}$ (ist def. wenn T_t endlicher Zeit. oder $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t \in \overline{\mathbb{R}}$ existiert f.s.)

(Def 10.6) $\Big\{$ $(X_t)_{t\geq 0}$ ist $(T_t)_{t\geq 0}$-stetig, falls (w-f.s.) $X_t(\omega)$ ist Konstant auf Sprüngen von T_t.

. Eigenschaft: (Thm 10.8): $(T_t)_{t\geq 0}$ Zeitwechsel, $X \in H^2$, X $(T_t)_{t\geq 0}$-stetig.

$\Rightarrow \hat{X} \in \hat{H}^2$ und

$\langle \hat{X} \rangle_t = \langle X \rangle_{T_t} - \langle X \rangle_{T_0}$.

Beispiel: $\Big\{$ $T_t = \inf\{s \geq 0 \text{ s.d. } \langle X \rangle_s > t\} \Rightarrow X$ ist $(T_t)_{t\geq 0}$-stetig.

. Anwendungen: (Thm 10.12): τ endliche Stoppzeit, X_t: d-dim BB bzgl $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

$\Rightarrow X_{\tau+t} - X_\tau$: d-dim BB bzgl $(\mathcal{F}_{t+\tau})_{t\geq 0}$.

Dubins-Schwarz: (Thm 10.13). $X \in M^0_{loc}$ mit $\langle X \rangle_\infty = \infty$ f.s.

$\Rightarrow \Big\{$. $B_t = X_{T_t}$ mit $T_t = \inf\{s \geq 0 \mid \langle X \rangle_s > t\}$ ist 1-d BB bzgl $(\mathcal{F}_{T_t})_{t\geq 0}$

. $X_t = B_{\langle X \rangle_t}$.

Mart. Darstellung: (Thm 12.5) . $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ Brownsche Filtration.

. Wenn M lokale $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal, dann besitzt stetige Version mit

$M_t = \underset{\text{Konst.}}{M_0} + \int_0^t \underset{\in L^2_{loc}}{H_s}\, dB_s$

F) Girsanov:

· **Idee:** Masswechsel mit Martingal Z_t.

· $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ Martingal mit $Z_t \geq 0$ und $\mathbb{E}(Z_t)=1$
$\Rightarrow Q_t := Z_t \mathbb{P}$

~~Lem~~ 11.2: $Z>0 \in M_{loc} \Rightarrow \exists! L \in M_{loc}$ s.d. $Z = \exp(L - \frac{1}{2}\langle L\rangle)$
$\left(L_t = \ln Z + \int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s\right)$

~~Lem 11.3~~:

$\begin{cases} \cdot\ M^0_{loc,T} = \text{stetige lok. Martingale auf } [0,T] \text{ bzgl } (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}, M_0=0 \\ \cdot\ \tilde{M}^0_{loc,T} = \quad \text{"} \quad (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, Q_T, M_0=0. \end{cases}$

(Thm 11.4) $\begin{cases} \text{Sei } M \in M^0_{loc,T} \\ \Rightarrow \tilde{M}_t = M_t - \langle M, L\rangle_t \in \tilde{M}^0_{loc,T} \text{ und } \langle \tilde{M}\rangle_t = \langle M\rangle_t. \end{cases}$

Girsanov: (Thm 11.6) · W_t ein d-dim BB., $X_t \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$,

$$L_t := (X \cdot W)_t = \sum_{k=1}^d \int_0^t X_s^k \, dW_s^k$$

$$Z_t = \mathcal{E}^{L_t} = \exp\left(\sum_{k=1}^d \int_0^t X_s^k dW_s^k - \frac{1}{2}\int_0^t \|X_s\|^2 ds\right)$$

Sei $Q_t = Z_t \mathbb{P}$ und

$$\tilde{W}_t^k = W_t^k - \int_0^t X_s^k ds$$

$\Rightarrow \forall T>0\ (\tilde{W}_t)_{0\leq t\leq T}$ ist eine d-dim BB
auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, Q_T)$.

· Beispiel: $d=1$, $X_t = \mu \neq 0$ (konstant), W_t BB. bzgl $(\mathcal{F}_t), \mathbb{P}$).
$\Rightarrow (\tilde{W}_t = W_t - \mu t)_{t\geq 0}$ ist eine BB bzgl
$\mathbb{P}_t^{(\mu)} := Z_t \mathbb{P}$, mit $Z_t = \exp(\mu W_t - \frac{1}{2}\mu^2 t)$.