Institut für Angewandte Mathematik
SS 2017
Patrik Ferrari, Eva Kopfer & Angelo Profeta

9. Übungsblatt „Einführung in die Statistik"

Abgabe: Mittwoch 5.7.2017 in der Vorlesung

---

1. (Lärmbelastung Test) *[6 Pkt]*

Ein anhaltender Konflikt zwischen einem Industriebetrieb und einer Gruppe von Umweltschützern soll so gelöst werden: Liegt die durchschnittliche Lärmbelastung an der Zufahrtsstrasse zum Betrieb um 8 Uhr früh über 70 dB, so wird eine Einschränkung des Betriebsverkehrs und langfristig eine Verbesserung des Lärmschutzes vorgeschrieben, andernfalls darf der Betrieb weiterarbeiten wie bisher. Gemessen wird die Lärmbelastung an der Zufahrtsstrasse um 8 Uhr an 25 Werktagen. Aus den 25 Messwerten wird der Mittelwert und die Standardabweichung geschätzt.

1.1. Stellen Sie ein geeignetes statistiches Modell auf, und erörtern Sie die Voraussetzungen.

1.2. Formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternative des Tests.

1.3. Welche Teststatistik verwenden Sie? Was ist die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese?

1.4. Zu verhandeln bleibt noch das Signifikanzniveau des Tests. Sie sind Vertreter des Betriebes. Stimmen Sie eher für 10% oder für 5%?

1.5. Man hat sich auf das Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ geeinigt, und die Messungen durchgeführt. Der Stichprobenmittelwert ist 76 dB, die Standardabweichung der Stichprobe beträgt 4 dB. Berechnen Sie den Wert der Teststatistik aus den Daten, und treffen Sie eine Testentscheidung.

1.6. Welche Auswirkungen hätte ein Fehler 1. Art bei diesem Test? Welche Auswirkungen hätte ein Fehler 2. Art?

2. (Urnenmodell) *[4 Pkt]*

In einer Urne befinden sich N Kugeln, wobei ein unbekannte Anzahl ϑ von diesen weiß und die restlichen $N - \vartheta$ Kugeln schwarz sind. Für ein gegebenes ϑ_0 soll die Hypothese $H_0 : \vartheta \geq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$ anhand der Beobachtung von n Zügen ohne Zurücklegen getestet werden.

a) Geben Sie einen gleichmäßig besten Test zum Niveau α an.

b) Sei nun $N = 1000$, $\vartheta_0 = 750$ und $\alpha = 0.01$. Wie groß muß n mindestens gewählt werden, damit die Macht des Tests bei jedem $\vartheta \leq 700$ mindestens 0.99 beträgt.

3. (Test gegen fallenden Trend) *[6 Pkt]*

Betrachten Sie das unendliche Produktmodell für den Chiquadrat-Anpassungstest, d.h. $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(E)^{\otimes\mathbb{N}}, \vartheta^{\otimes\mathbb{N}} : \vartheta \in \Theta)$ mit $E = \{1, \ldots s\}$, wobei Θ eine Teilmenge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf E ist

$$\Theta \; = \; \left\{\vartheta \in (0,1)^E \mid \textstyle\sum_{i \in E} \vartheta(i) = 1\right\} \; \subset \; \mathcal{M}_1(E).$$

Weiterhin sei ρ die Gleichverteilung auf E. Wenn die Hypothese $H_0 : \vartheta = \rho$ nicht ganz gegen $H_1 : \vartheta_1 \neq \rho$ getestet werden soll, sondern nur gegen $H_1' : \vartheta(1) > \vartheta(2) > \ldots > \vartheta(s)$ (*fallender Trend*), ist der Chiquadrat-Anpassungstest nicht besonders gut geeignet. Besser ist die Verwendung der Teststastitik

$$T_n \; = \; \frac{\sum_{i \in E} i \, h_n(i) - n(s+1)/2}{\sqrt{n(s^2-1)/12}}.$$

Hierbei bezeichnet $h_n(i)$ die absoluten Häufigkeiten.

a) Berechnen Sie $\mathrm{E}_\vartheta[T_n]$ und $\mathrm{Var}_\vartheta[T_n]$ unter der Nullhypothese und zeigen Sie, dass $T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{0,1}$ konvergiert.

   Hinweis: Stellen Sie T_n als Summe unabhängiger Zufallsvariablen dar.

b) Entwickeln Sie ein vernüftiges Testverfahren für H_0 gegen H_1'.

c) Es wird vermutet, dass bei Pferderennen auf einer kreisförmigen Rennbahn die Startpositionen einen Einfluss auf die Gewinnchancen haben. Die folgende Tabelle gliedert die 144 Siege nach der Startposition auf (von innen nach außen):

Startposition	1	2	3	4	5	6	7	8
Häufigkeit	29	19	18	25	17	10	15	11

   Testen Sie die Nullhypothese *gleiche Gewinnchancen* gegen die Alternative *abnehmende Gewinnchancen* zum Niveau $\alpha = 0.01$ sowohl mit dem oben entwickelten Test als auch mit dem Chiquadrat-Test.

4. (Pseudozufallszahlen) *[4 Pkt]*

Ein Algorithmus zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen soll getestet werden. Dazu läßt man ihn etwa $n = 10000$ Ziffern $\in \{0, \ldots, 9\}$ erzeugen. Ein Versuch mittels R ergab hierbei

Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit	1064	980	1023	918	1029	1037	996	1031	936	986

Führen Sie zu einem geeigneten Niveau einen χ^2-Anpassungstest auf Gleichverteilung durch.