Institut für Angewandte Mathematik
SS 2017
Patrik Ferrari, Eva Kopfer & Angelo Profeta

8. Übungsblatt „Einführung in die Statistik"

Abgabe: Mittwoch 28.6.2017 in der Vorlesung

---

1. (Zweiseitiger Chiquadrat-Test) *[8 Pkt]*

Betrachten Sie im zweiparametrigen Gauß'schen Produktmodell das zweiseitige Testproblem $H_0 : v = v_0$ gegen $H_1 : v \neq v_0$ mit folgender Entscheidungsvorschrift: H_0 werde akzeptiert, falls $c_1 \leq \frac{n-1}{v_0} V^* \leq c_2$ für $0 < c_1 < c_2$.

a) Bestimmen Sie die Gütefunktion G_φ dieses Tests φ und zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial G_\varphi}{\partial v}(m, v) \gtreqless 0 \qquad \text{je nachdem, ob} \qquad v \gtreqless v_0 \, \frac{c_2 - c_1}{(n-1)\ln(c_2/c_1)}.$$

b) Naiv würde man c_1, c_2 so wählen, dass

$$\mathrm{P}_{(m,v_0)}\left[\tfrac{n-1}{v_0} V^* < c_1\right] = \mathrm{P}_{(m,v_0)}\left[\tfrac{n-1}{v_0} V^* > c_2\right] = \frac{\alpha}{2}.$$

Zeigen Sie im Falle $\alpha = 0.02$ und $n = 3$, dass dieser Test verfälscht ist und skizzieren Sie G_φ.

c) Wie kann man einen unverfälschten Test der obigen Bauart konstruieren?

d) Welche Gestalt hat der zugehörige Likelihood-Quotienten-Test?

2. (t-Tests) *[6 Pkt]*

Mattes, Peirce und Friedman berichten im Artikel

> Daily caloric intake of normal-weight adults: response to changes in diatary energy density of a luncheon meal. *Am. J. Clin. Nutr.*, 1988, **48**, 214-219

unter anderem über die mittlere tägliche Kalorienaufnahme von zehn Probanden über einen Zeitraum von sieben Wochen. Einen Auszug der Daten finden Sie in folgender Tabelle

	Sex	Age	Weight	Height	Mean daily energy intake
		year	*kg*	*cm*	*kcal*
1	M	33	75.5	176	2827
2	M	29	81.0	186	3044
3	M	34	75.4	173	2873
4	M	31	73.9	180	3078
5	M	27	79.1	183	2431
6	F	27	66.5	173	2669
7	F	25	53.5	170	2148
8	F	23	61.0	161	2166
9	F	32	65.2	172	2325
10	F	38	57.3	174	2536

Es soll nun untersucht werden, ob die Kalorienaufnahme bei den Männer wie bei den Frauen systematisch von der Empfehlung von 2805 *kcal* bzw. 2260 *kcal* abweicht. Führen Sie unter Annahme der Normalverteilung der Kalorienaufnahme mit Hilfe des Befehles einen t-Test durch mit Niveau $\alpha = 0.1$ für die Daten der Frauen und der Männer. (nicht vergessen, das Modell, die Nullhypothese und Alternative zu formulieren).

3. (Schimmelpilztoxin im Apfelsaft) [*6 Pkt*]

Die Stiftung Warentest berichtet im Artikel “Nicht ungetrübt” (*test*, 2004, **8**, 18-22) das in 2 vom 24 getesteten Apfelsäften Patulin, ein Schimmelpilztoxin, oberhalb des EU-weiten Grenzwert von $m_0 = 50\ \mu g/l$ nachgewiesen werden konnte.
Nehmen Sie an, der Gehalt x (in $\mu g/l$) an Patulin in Flaschen einer bestimmten Sorte Apfelsaft sei normalverteilt mit unbekanntem Mittelwert m und Varianz v. Vor Versand einer Lieferung testet der Produzent die Hypothese

$$H_0 : m \leq m_0 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : m > m_0$$

zum Irrtunsniveau $\alpha = 0.01$ mit einer Stichprobe der Größe $n = 5$. Die Charge wird nur ausgeliefert, wenn der Test H_0 nicht verwirft. Eine Verbraucherorganisation testet ebenfalls eine Stichprobe $n = 5$ zum Irrtumsniveau $\alpha = 0.01$ bezüglich

$$H_0' : m \geq m_1 \qquad \text{gegen} \qquad H_1' : m < m_1 \qquad (m_1 = 40\ \mu g/l).$$

a) Beschreiben Sie inhaltlich die möglichen Fehlentscheidungen der beiden Tests. Plotten Sie die Gütefunktion der beiden Tests als Funktion von m für $v \in \{5, 10\}$.

b) Zu welchem Ergebnis kommen die beiden Tests, wenn der Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 52.5$ und die korrigierte Stichprobenvarianz $v^* = 8.7$ beträgt.

c) Wie groß müßte n im *Aufgabenteil b)* gewählt werden, so dass sich die dort erhaltene Antwort ändert?