Institut für Angewandte Mathematik
SS 2017
Patrik Ferrari, Eva Kopfer & Angelo Profeta

0. Übungsblatt „Einführung in die Statistik"

Abgabe: Mittwoch 26.4.2017 in der Vorlesung

---

1. (Gamma-Verteilung) *[5 Pkt]*

Für jedes $\alpha, r > 0$ heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß $\Gamma(\alpha, r)$ auf $\big((0,\infty), \mathcal{B}((0,\infty))\big)$ mit der Dichtefunktion für $x > 0$

$$\gamma_{\alpha,r}(x) \;=\; \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\, x^{r-1}\, \mathrm{e}^{-\alpha x}, \qquad \text{wobei} \qquad \Gamma(r) \;=\; \int_0^\infty y^{r-1}\, \mathrm{e}^{-y}\, \mathrm{d}y$$

ist, die Gamma-Verteilung mit Skalenparameter α und Formparameter r.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der $\Gamma(\alpha, r)$-Verteilung.

b) Sei X eine $\Gamma(\alpha, r)$-verteilte und Y eine davon unabhängige $\Gamma(\alpha, s)$-verteilte Zufallsvariable, $\alpha, r, s > 0$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Bestimmen Sie die Verteilung von tX für $t > 0$ sowie von $X + Y$.

2. (Verschobene Gleichverteilungen) *[3 Pkt]*

Gegeben sei das Modell $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{U}_\vartheta^{\otimes n} : \vartheta \in \mathbb{R})$, wobei $\mathcal{U}_\vartheta$ die Gleichverteilung auf dem Intervall $[\vartheta - \frac{1}{2}, \vartheta + \frac{1}{2}]$ ist. Zeigen Sie, dass

$$M(x) \;=\; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \qquad \text{und} \qquad T(x) \;=\; \frac{1}{2}\big(\max_{1 \le i \le n} x_i + \min_{1 \le i \le n} x_i \big)$$

erwartungstreue Schätzer sind (d.h., $\mathbb{E}_\theta(M(x)) = \mathbb{E}_\theta(T(x)) = \theta$).