Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2011
Patrik Ferrari, Nikolaus Schweizer

1. Klausur zur „Algorithmische Mathematik II" - A

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- Taschenrechner, Handys u.ä. sind **nicht zugelassen**!
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen sowie den Aufgaben abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte beachten Sie, dass nur dann Punkte auch im Falle von Rechenfehlern vergeben werden können, wenn aus Ihren Kommentaren zu den Rechnungen der Lösungsweg klar erkennbar sein sollte.
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Abgabe bis spätestens 12.00 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	**Summe**	**Note**
Punkte							

1. (Gesetz der Großen Zahl) [*10 Pkt*]

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X^2) < \infty$.

a) Beweisen Sie die Tchebishev-Ungleichung: Für alle $a > 0$ gilt [*3 Pkt*]

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$$

b) Formulieren Sie das Schwache Gesetz der Großen Zahl aus der Vorlesung. [*4 Pkt*]

c) Beweisen Sie das Schwache Gesetz der Großen Zahl mit Hilfe der Tchebishev-Ungleichung aus a). [*3 Pkt*]

2. (Erwartungswert und Varianz) [*10 Pkt*]

Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. X sei Bernoulli-verteilt auf $\{-1, 1\}$, d.h. $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = -1)$. Y sei Poisson-verteilt mit Rate $\lambda > 0$. Für ein festes $\theta \in \mathbb{Z}$ betrachte die Zufallsvariable Z, die als

$$Z = \theta + X \cdot Y$$

definiert ist.

a) Berechne $\mathbb{P}(Z = k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. [*4 Pkt*]

b) Berechne $\mathbb{E}(Z)$. [*2 Pkt*]

c) Berechne $\mathrm{Var}(Z)$. [*4 Pkt*]

3. (Bedingte Wahrscheinlichkeiten) [*5 Pkt*]

Seien X_1 und X_2 zwei unabhängige, geometrisch-verteilte Zufallsvariablen, d.h. $\mathbb{P}(X_1 = k) = \mathbb{P}(X_2 = k) = (1 - q)q^k$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ und für ein $q \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass die Verteilung der Zufallsvariablen X_1 bedingt auf den Wert von $X_1 + X_2$ uniform ist, d.h.,

$$\mathbb{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \frac{1}{n + 1}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

4. (Markovketten) *[15 Pkt]*

a) Betrachten Sie eine zeitlich homogene Markovkette $(X_i)_{i\geq 0}$ auf einem endlichen Zustandsraum S mit Übergangsmatrix Q. Definieren Sie Aperiodizität und Irreduzibilität von Q. Definieren Sie den totalen Variationsabstand und formulieren Sie den Konvergenzsatz für endliche Markovketten. *[4 Pkt]*

b) Betrachten Sie die Übergangsmatrix Q auf dem Zustandsraum $S = \{1, \ldots, n\}$, die wie folgt gegeben ist: $Q(i, i+1) = Q(i+1, i) = \frac{1}{2}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $Q(n, 1) = Q(1, n) = \frac{1}{2}$. *[4 Pkt]*

Was ist die stationäre Verteilung von Q? Zeigen Sie: Q ist für gerade n periodisch und für ungerade n aperiodisch.

c) Betrachte Sie nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung π auf S, die durch *[3 Pkt]*

$$\pi(\{i\}) = \frac{i\,2^i}{Z} \quad \forall i \in S$$

gegeben ist. Hierbei ist die Normierungskonstante Z so gewählt, dass $\pi(S) = 1$. Stellen Sie die Übergangsmatrix P der Metropoliskette mit stationärer Verteilung π und Vorschlagskette Q (aus Aufgabenteil b)) auf. Zeigen Sie, dass P irreduzibel und aperiodisch ist.

d) Sei nun X eine Zufallsvariable mit Werten in S und Verteilung π. Sei weiterhin $f : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir wollen den Metropolisalgorithmus mit den Übergangswahrscheinlichkeiten P aus Aufgabenteil c) verwenden, um $\mathbb{E}[f(X)]$ zu approximieren. *[4 Pkt]*

Geben Sie ein geeignetes Programm in detailliertem Pseudocode an, das die Metropoliskette simuliert und einen Schätzer für $\mathbb{E}[f(X)]$ ausgibt. Als (einziger) Zufallsgenerator steht Ihnen hierfür eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen U_i zur Verfügung, die auf $[0, 1]$ gleichverteilt sind. Sie dürfen davon ausgehen, dass Sie die Einträge der Übergangsmatrix P als $P(i, j)$ aufrufen können, d.h. Sie müssen die Matrix nicht im Programm aufstellen.

5. (Hermite Interpolation) [*10 Pkt*]

Gesucht ist ein Polynom $p \in \mathbb{P}_m$ mit

$$p(0) = a_0, \quad p'(0) = a_1, \quad p''(0) = a_2, \quad p(2) = a_3.$$

a) Welches ist das kleinste m, für das dieses Interpolationsproblem für alle $a = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ eine Lösung hat? (ohne Beweis) [*1 Pkt*]

b) Schreiben Sie p als Linearkombination von geeigneten Hermite-Basisfunktionen (ohne die Basisfunktionen explizit zu berechnen). Welche Bedingungen erfüllen die Basisfunktionen? [*2 Pkt*]

c) Berechnen Sie die Basisfunktionen in der Darstellung aus b) explizit. [*5 Pkt*]

d) Berechnen Sie p explizit für $a = (0, 1, 2, 6)$. Was ist der Grad von p? [*2 Pkt*]

6. (Fixpunktproblem) [*8 Pkt*]

Sei C_0 die Menge der stetigen Funktionen von $I = [0, \gamma]$ nach $\mathbb{R}$ wobei $\gamma > 0$. Definiere eine Metrik d auf C_0 durch

$$d(f, g) = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)| \quad \text{für alle} \quad f, g \in C_0.$$

Betrachte weiterhin die Abbildung $T : C_0 \to C_0$, die durch

$$T(f)(x) = 1 + \alpha \int_0^x f(t)dt$$

definiert ist. Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass C_0 vollständig bezüglich der Metrik d ist.

a) Beweisen Sie eine Abschätzung der Form [*3 Pkt*]

$$d(T(f), T(g)) \leq L(\alpha, \gamma) d(f, g)$$

für $f, g \in C_0$ und $L(\alpha, \gamma) < \infty$. Geben Sie eine obere Schranke $\gamma^*(\alpha)$ an, so dass T für $\gamma < \gamma^*(\alpha)$ eine Kontraktion von C_0 nach C_0 mit Kontraktionskonstante $L(\alpha, \gamma)$ ist.

b) Warum gilt folgendes: Für $\gamma < \gamma^*(\alpha)$ gibt es genau ein $f^* \in C_0$ gibt, so dass [*2 Pkt*]

$$f^*(x) = 1 + \alpha \int_0^x f^*(t)dt \quad \forall x \in I.$$

c) Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_0, f_1, \ldots$, die durch $f_0 \equiv 0$ und $f_{i+1} = T(f_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ definiert ist. Berechnen Sie f_1, f_2 und f_3. Bestimmen Sie f^*. Hierfür können Sie zum Beispiel eine Formel für f_n herleiten und den Grenzwert betrachten. [*3 Pkt*]