Stochastische Analysis

Erinnerung: Ein **stochastischer Prozeß** X ist ein Familie $X = (X_t, t\in I)$ von Zufallsvariablen auf einem W–Raum $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit Werten in einem Meßraum $(S,\mathfrak{S})$, Dabei ist t der **Zeitparameter**, I die **Parametermenge** und S der **Zustandsraum**. Ist $I \subset \mathbb{Z}$ (z.B. $I = \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,...\}$), so spricht man von einem **zeitdiskreten Prozeß**, für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ wird (X_t) als **zeitstetiger Prozeß** bezeichnet. Die Abb. $t \mapsto X_t(\omega)$ heißt **Pfad** (Trajektorie).

(X_t) modelliert die zufallsabhängige zeitliche Entwicklung eines Systems. Dabei gibt X_t den Zustand des Systems zum Zeitpunkt t wieder.

Es ist $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t, t\in I)$ eine **Filterung** (in $\mathfrak{F}$), wenn $\mathfrak{F}_t$ eine Unter–σ–Algebra von $\mathfrak{F}$ ist und ferner gilt:

$$\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t \text{ für } s < t.$$

$\{X_t, t\geq 0\}$ hat **unabhängige Zuwächse**, falls für $k\in\mathbb{N}$, $0:=t_0<t_1<...<t_k$ die Zva

$$X_{t_0}, X_{t_1}-X_{t_0}, X_{t_2}-X_{t_1},...,X_{t_k}-X_{t_{k-1}}) \text{ unabhängig sind.}$$

$\{X_t,t\geq 0\}$ hat **stationäre Zuwächse**, falls für h>0 die Verteilung von $X_{t+h}-X_t$ unabhängig von $t\geq 0$ ist .

§ 0 Glückspiele.

Seien Z_n, $n\in\mathbb{N}$, unabhängige Zva auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit $P[Z_n = 1] = p$, $P[Z_n = -1] = 1-p := q$ für ein $0 < p < 1$. Dabei ist Z_n als Gewinn beim n–ten Spiel zu interpretieren, wenn der Einsatz 1 Geldeinheit ist. Dann ist $S_n := Z_1+...+Z_n$ gerade der Gewinn nach n Spielen, wenn der Einsatz jeweils 1 Geldeinheit ist; sei $S_0 := 0$.

A Das Ruinproblem.

Seien $0 \leq a \leq c$ gegeben mit $a \in \mathbb{N}_0$, $c \in \mathbb{N}$. Wir interpretieren a als Startkapital, c als den zuerreichenden Kapitalstand (Zel) und 0 als Ruinzustand. $X_n := a + S_n$ ist der Kapitalstand nach dem n–ten Spiel, wenn der Einsatz 1 Geldeinheit ist, und eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$.. Gesucht sind

$$Q_*(a) := P[\cup_{n=0}^{\infty} \{X_n = c, X_m > 0, 0 \leq m \leq n\}] \quad \text{mit } Q_*(0) = 0, Q_*(c) = 1$$

$$\bar{Q}_*(a) := P[\cup_{n=0}^{\infty} \{X_n = 0, X_m < c, 0 \leq m \leq n\}].$$

Dabei ist $Q_*(a)$ die W., das Ziel c vor dem Ruin zu erreichen, und $\bar{Q}_*(a)$ die W., vor Erreichen des Ziels c ruiniert zu werden. Gemäß der Vorlesung "Stochastische Prozesse" Beispiel, S. 38 nach Stoppsatz 4.6 wissen wir:

$$(0.1) \qquad \bar{Q}_*(a) = \begin{cases} [\rho^c - \rho^a]/[\rho^c - 1[& \text{für } \rho \neq 1 \\ (c-a)/c & \rho = 1 \end{cases}, \ 0 \leq a \leq c$$

$$(0.2) \qquad \bar{Q}_*(a) + Q_*(a) = 1 \quad \text{mit } \rho := q/p.$$

B Strategien.

Es liege die gleiche Situation vor wie oben; jetzt soll aber nicht immer der Einsatz 1 gewählt werden, sondern es sollen beliebige Strategien erlaubt werden. Dabei kann der Einsatz δ_n nach n Spielen in Abhängigkeit vom Spielverlauf $(Z_1,...,Z_n)$ bis z. Zt. n abhängen.

Definition. $\delta = (\delta_n, n\in\mathbb{N}_0)$ ist eine *Strategie*, wenn $\delta_0 \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante ist und $\delta_n : \{-1,+1\}^n \mapsto \mathbb{N}_0$ eine Funktion ist für $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel. Verdoppele den Einsatz bis zum ersten Gewinn (**Petersburger Spiel**).

$$\delta_0 := 1,\ \delta_n(-1,...,-1) := 2^n,\ \delta_n := 0 \text{ sonst.}$$

Bei einem Gewinn z.Zt. n hat man dann einen Kapitalstand von $2^n - \sum_0^{n-1} 2^m = 1$.

Dabei ist $P\left[\cup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 1\}\right] = 1 - \lim_{N\to\infty} q^N = 1$. []

Zu gegebenem Anfangskapital a und einer Strategie δ definieren wir nun weitere reelle Zufallsgrößen W_n^δ, X_n^δ, wobei W_n^δ den n–ten Einsatz und X_n^δ den Kapitalstand nach n Spielen beschreiben:

$W_n^\delta := \delta_{n-1}(Z_1,...,Z_{n-1})$, $X_0^\delta := a$, $X_n^\delta := X_{n-1}^\delta + W_n^\delta \cdot Z_n$, $\mathfrak{F}_n := \sigma(Z_1,...,Z_n)$ $n \geq 1$, $\mathfrak{F}_0 := \{\emptyset,\Omega\}$;

dann ist X_n^δ offenbar eine $\mathbb{Z}$–wertige Zva. Da die Menge $\{-1,+1\}^n$ endlich ist, sind W_n^δ und X_n^δ beschränkte Zva, und wir haben keine Integrierbarkeitsprobleme. Offenbar sind W_n^δ und Z_n unabhängige Zva und wir wissen:

$E\left[X_n^\delta | \mathfrak{F}_{n-1}\right] = X_{n-1}^\delta + W_n^\delta \cdot E\left[Z_n\right]$; dabei ist $W_n^\delta \geq 0$ und $E\left[Z_n\right] = p - q$. [In der Sprache der Vorlesung "Stochastische Prozesse", Def. 3, S. 35, ist $(U_n) = (W_{n-1}^\delta)$ eine Kontrolle des Super–Martingals (X_n) (bei $p\leq\frac{1}{2}$).] Somit ergibt sich

Lemma 0.3. (X_n^δ) ist ein Supermartingal für $p \leq \frac{1}{2}$ für jede Strategie δ.

Neben Strategien können durch $(\mathfrak{F}_n)$–**Stoppzeiten** τ Abbruchzeiten definiert werden. Die Entscheidung, z. Zt. n zu stoppen, fällt also auf Grund der Beobachtung von dem Spielverlauf $(Z_1,...,Z_n)$ $\left[\{\tau=n\} = \{(Z_1,...,Z_n)\in B_n\} \in \mathfrak{F}_n \text{ für ein gewisses } B_n\right]$.

Beispiele: 1) $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N};\ Z_n = 1\}$ mit $\inf \emptyset := \infty$ ist eine Stoppzeit.

2) $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N};\ X_n^\delta \geq c\}$ ist eine Stoppzeit.

Definition. Zu einer Strategie δ und einer Stoppzeit τ sei $\delta\wedge\tau$ die Strategie mit $W_n^{\delta\wedge\tau} = W_n^\delta \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \geq n\}}$ und damit $X_n^{\delta\wedge\tau} = X_{n\wedge\tau}^\delta$ (mit $n\wedge\tau := \min(n,\tau)$).

Es ist leicht zu sehen, daß durch diese Vorschrift $\delta\wedge\tau$ als eine Strategie im Sinne obiger Definition festgelegt wird. Ebenso leicht sieht man, daß für eine f.s. endliche Stoppzeit τ (d.h. $P[\tau<\infty] = 1$) X_τ eine gemäß $X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega)$ f.s. erklärte Zva ist. Aus 0.3 erhalten wir:

(0.4) $$E[X^\delta_{n\wedge\tau}] = E[X^{\delta\wedge\tau}_n] \le a = X^\delta_0 \quad \text{für } p \le \tfrac{1}{2}.$$

Offenbar gilt $X^\delta_{n\wedge\tau} = X^\delta_\tau$ auf $\{\tau \le n\}$ und damit $\lim_{n\to\infty} X^\delta_{n\wedge\tau} = X^\delta_\tau$ auf $\{\tau < \infty\}$. Es interessiert nun die Frage: Gilt die Ungleichung (0.4) auch für $E[X^\delta_\tau]$?

Gegenbeispiel. Sei $\tau := \inf\{n;\ Z_n = 1\}$ und δ durch $\delta_n \equiv 2^n$ definiert. Dann ist $\delta\wedge\tau$ gerade das Petersburger Spiel. Dann gilt aber $X^\delta_\tau = a + 1$ auf $\{\tau < \infty\}$ mit $a = X^\delta_0$ und $P[\tau < \infty] = 1$, also auch $E[X^\delta_\tau] = a + 1$, aber $E[X^\delta_{n\wedge\tau}] \le a$ für $p \le \frac{1}{2}$. []

Definition. δ heißt Strategie mit beschränktem Kredit, falls ein M (=M(a)) $\in \mathbb{N}_0$ existiert mit $X^\delta_n \ge -M$ f.s. .

Bei $X^{\delta\wedge\tau}_n = X^\delta_{n\wedge\tau} \ge -M$ und $P[\tau < \infty] = 1$ liefert das Lemma von Fatou (das folgt auch aus dem Stoppsatz 4.6 in "Stochastische Prozesse") : $\underline{\lim}\ E[X^\delta_{n\wedge\tau}] \ge E[\underline{\lim}\ X^\delta_{n\wedge\tau}] = E[X^\delta_\tau]$.

0.4 Stoppsatz. Ist τ eine f.s. endliche Stoppzeit und $\delta\wedge\tau$ eine Strategie mit beschränktem Kredit, so gilt: $E[X^\delta_\tau] \le a = X^\delta_0$ für $p \le \frac{1}{2}$.

Nach diesem Satz ist es optimal, überhaupt nicht zu spielen, wenn man $E[X^\delta_\tau]$ bei $p \le \frac{1}{2}$ maximieren will über alle (δ,τ), sodaß τ eine f.s. endliche Stoppzeit und $\delta\wedge\tau$ eine Strategie mit beschränktem Kredit ist. Ferner kann das Petersburger Spiel keine Strategie mit beschränktem Kredit sein.

Maximierung von $P[X^\delta_\tau = c] = E[1_{\{c\}}(X^\delta_\tau)]$.

Eine interessante Fragestellung ist es aber bei $p \le \frac{1}{2}$, die W. zu maximieren, das Ziel c zu erreichen (vgl. Dubins & Savage: How to gamble if you must). Es sei wieder das Anfangskapital $a \in \mathbb{N}_0$ und das Ziel $c \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Es werden jetzt nur Strategien ohne Kredit (M=0) zugelassen, also mit $X^\delta_n \ge 0$. Dies erreicht man durch $0 \le W^\delta_n \le X^\delta_n$. Da man nicht über das Ziel hinauszuschießen braucht, kann man auch $0 \le W^\delta_n \le c - X^\delta_n$ annehmen. Sei

(0.5**)** $$\tau^* = \tau^*_\delta := \inf\{n;\ X^\delta_n \in \{0,c\}\},\quad Q_\delta(a) := P[\tau^* < \infty,\ X^\delta_{\tau^*} = c\}.$$

Definition. Die Strategie δ^* heißt **wagemutiges Spiel**, falls für $X_n := X^{\delta^*}_n$ gilt:

$$W^{\delta^*}_n = \min(X_{n-1}, c - X_{n-1}) = \begin{cases} X_{n-1} & \text{falls } X_{n-1} \le \frac{1}{2}c \\ c - X_{n-1} & \text{falls } X_{n-1} \ge \frac{1}{2}c \end{cases}.$$

Sei dann $Q_n(a) := P[\tau^* \le n,\ X_{\tau^*} = c] = P[X_n = c]$ für $0 < a < c$, mit $Q_n(0) := 0$, $Q_n(c) = 1$.

Es soll wie Abschnitt A eine Rekursionsgleichung hergeleitet werden. Dazu setzen wir

$f_z(x) := x + \min(x,(c-x))\cdot z$, $z \in \{-1.+1\}$, $0 \le x \le c$.

Dann gilt gerade: $X_n = f_{Z_n}(X_{n-1}) = f_{Z_n}\circ\ldots\circ f_{Z_1}(X_0)$. Für $0 \le a \le c$ ergibt sich dann

$Q_n(a) = \Sigma_{z=\pm1}\, P[Z_1=z, X_n = c] = \Sigma_{z=\pm1}\, P[Z_1=z]\cdot P[f_{Z_n}\circ\ldots f_{Z_2}\circ f_z(a) = c]$

$= \Sigma_{z=\pm1}\, P[Z_1=z]\cdot P[f_{Z_{n-1}}\circ\ldots f_{Z_1}(f_z(a)) = c] = \Sigma_{z=\pm1}\, P[Z_1=z]\cdot Q_{n-1}(f_z(a))$ und damit

$Q_n(a) = p\cdot Q_{n-1}(2a) + q\cdot Q_{n-1}(0)$ für $a \le \frac{1}{2}c$, $Q_n(a) = p\cdot Q_{n-1}(c) + q\cdot Q_{n-1}(2a-c)$ für $a \ge \frac{1}{2}c$. Wegen $Q_{n-1}(0) = 0$, $Q_{n-1}(c) = 1$ erhalten wir schließlich

$$Q_n(a) = \begin{cases} p\cdot Q_{n-1}(2a)\ , & a \le \frac{1}{2}c \\ p\ +\ q\cdot Q_{n-1}(2a-c) & a \ge \frac{1}{2}c \end{cases}. \tag{0.6}$$

Der wesentliche Schritt wird im folgenden Lemma vollzogen:

0.7 Lemma. Für $p \le \frac{1}{2}$, gerades c und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt :

$$Q_{n+1}(x) \ge p\cdot Q_n(x+w) + q\cdot Q_n(x-w)\ ,\ 0 \le w \le x,\ x+w \le c. \tag{0.8}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist gerade die W, das Ziel c zu erreichen, wenn man zuächst w einsetzt und dann gemäß der wagemutigen Strategie fortfährt.

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Induktion. Es ist $Q_0(x) = \mathbf{1}_{\{c\}}(x)$ für $0 \le x \le c$.

Nach (0.7) wissen wir $Q_1(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{2}c \\ p & \frac{1}{2}c \le x < c \end{cases}$. Also gilt (0.8) für n=0.

Wir machen jetzt den Schluß $n-1 \to n$.

Im **Fall** $x+w \le \frac{1}{2}c$ haben wir mit (0.6) und Induktionsvoraussetzung:

$p\cdot Q_n(x+w) + q\cdot Q_n(x-w) = p\cdot [p\cdot Q_{n-1}(2x+2w) + q\cdot Q_{n-1}(2x-2w) \le p\cdot Q_n(2x) = Q_{n+1}(2x)$.

Der **Fall** $x-w \ge \frac{1}{2}c$ geht analog.

Wir betrachten jetzt den **Fall** $0 \le x-w \le x \le \frac{1}{2}c \le x+w \le c$. Dann haben wir mit (0.6)

$p\cdot Q_n(x+w) + q\cdot Q_n(x-w) = p\cdot [p + q\cdot Q_{n-1}(2x+2w-c)] + q\cdot p\cdot Q_{n-1}(2x-2w)$

$= p^2 + q\cdot \{p\cdot Q_{n-1}(x'+w') + p\cdot Q_{n-1}(x'-w')\}$ mit $x' = 2x - \frac{1}{2}c$, $w' = 2w - \frac{1}{2}c$

$= p^2 + q\cdot \{p\cdot Q_{n-1}(x'+|w'|) + p\cdot Q_{n-1}(x'-|w'|)\}$

$\le p^2 + q\cdot \{p\cdot Q_{n-1}(x'+|w'|) + q\cdot Q_{n-1}(x'-|w'|)\} \le p^2 + q\cdot Q_n(x')$ (nach Ind. voraus.)

$= p^2 + q\cdot p\cdot Q_{n-1}(2x')$ (nach (0.6) wegen $x' \le \frac{1}{2}c$)

$= p^2 + q\cdot p\cdot Q_{n-1}(4x-c) = p\cdot Q_n(2x)$ (nach (0.6) wegen $2x \ge x+w \ge \frac{1}{2}c$)

$= Q_{n+1}(x)$ (nach (0.6) wegen $x \le \frac{1}{2}c$) .

Der letzte **Fall** $0 \le x-w \le \frac{1}{2}c \le x \le x+w \le c$ geht wie der dritte Fall, indem man eine Spiegelung bei $\frac{1}{2}c$ vornimmt , d.h. man betrachet $\bar{Q}_n(x) := 1 - Q_n(c-x)$. []

0.9 **Satz.** Für $p \le \frac{1}{2}$, gerades c und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt : δ^* ist optimal für den Horizont n, d.h.

$$P[X_n^\delta = c] \le Q_n(a) = P[X_n^{\delta^*} = c] \text{ für alle zulässigen Strategien } \delta.$$

Beweis. Es ist $E[Q_m(X_k^\delta)] = \sum_{0 \le w \le x \le c} E[\mathbf{1}_{\{X_{k-1}^\delta = x,\, W_k^\delta = w\}} \cdot Q_m(x + w \cdot Z_k)]$

$= \sum_{0 \le w \le x \le c} P[X_{k-1}^\delta = x, W_k^\delta = w]\ E[Q_m(x + w \cdot Z_k)]$

da $(X_{k-1}^\delta, W_k^\delta) = (X_{k-1}^\delta, \delta_k(Z_1,\ldots,Z_{k-1}))$ unabhängig von Z_k ist,

$\le \sum_{0 \le w \le x \le c} P[X_{k-1}^\delta = x, W_k^\delta = w]\ Q_{m+1}(x)$ wegen (0.8)

$= E[Q_{m+1}(X_{k-1}^\delta)]$. Also ergibt sich

$Q_n(a) = E[Q_n(X_0^\delta)] \ge E[Q_{n-1}(X_1^\delta)] \ge \ldots \ge E[Q_0(X_n^\delta)] = P[X_n^\delta = c]$, []

Jetzt kann die Optimalität von δ^* auch für eine unbeschränkte Spieldauer gezeigt werden.

0.10 Korollar. Für $p \le \frac{1}{2}$ und gerades c gilt : δ^* ist optimal für den Horizont ∞, d.h.
$P[X_{\tau^*}^\delta = c, \tau^* < \infty] \le P[X_{\tau^*}^{\delta^*} = c, \tau^* < \infty]$ für alle zulässigen Strategien δ.

Beweis: Es ist $P[X_{\tau^*}^\delta = c, \tau^* < \infty] = \lim_{n\to\infty} P[X_{\tau^*}^\delta = c, \tau^* \le n] = \lim_{n\to\infty} P[X_n^\delta = c]$
$\le \lim_{n\to\infty} P[X_n^{\delta^*} = c] = \lim_{n\to\infty} P[X_{\tau^*}^{\delta^*} = c, \tau^* \le n] = P[X_{\tau^*}^{\delta^*} = c, \tau^* < \infty]$. []

Kapitel 1: Zeitstetige stochastische Prozesse.

§1 Stochastische Prozesse und Stoppzeiten

Im folgenden sei ein metrischer Raum (S,d) gegeben, $\mathfrak{S}$ bezeichne die Borelsche σ–Algebra bzgl. der Metrik d. Falls nichts anderes gesagt wird, ist $X = (X_t, t\geq 0)$ ein zeitstetiger stochastischer Prozeß auf einem W–Raum $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit dem Zustandsraum $(S,\mathfrak{S})$.

Die Überlegungen übertragen sich in der Regel direkt auf den Fall, daß zu einem endlichen Zeithorizont $T \in (0,\infty)$ ein Prozeß $X = (X_t, 0\leq t\leq T)$ gegeben ist. Einen solchen kann man etwa durch $X_s := X_T$ für $s>T$ fortsetzen und dann darauf die folgenden Überlegungen anwenden.

1.1 Def. X heißt stetig bzw. rechtsstetig [bzw. linksstetig], wenn alle Pfade von X stetig bzw. bzw. rechtsseitig stetig [bzw. linksseitig stetig] sind.

Es soll ein Gleichheitsbegriff für stochastische Prozesse untersucht werden.

1.2 Def. Seien X und Y stochastische Prozesse auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit Zustandsraum $(S,\mathfrak{S})$. Dann heißen X und Y **nicht unterscheidbar** oder **Versionen** von einander, falls gilt:

$$X_t = Y_t \ \ \forall\, 0\leq t<\infty \ \ P\text{–f.s.}\, .$$

Bei Nichtunterscheidbarkeit existiert also eine von t unabhängige Nullmenge, außerhalb derer Gleichheit von X_t und Y_t vorliegt.

1.3 Lemma. Sind X und Y rechtsstetig [oder beide linksstetig], so sind sie bereits nicht unterscheidbar, wenn gilt: $X_t = Y_t$ P–f.s. $\forall\, 0\leq t<\infty$.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine Menge Ω' vom Maß eins, so daß gilt:

$X_t(\omega) = Y_t(\omega) \ \ \forall\, \omega\in\Omega',\ t\in\mathbb{Q}\cap[0,\infty)$. Es folgt:

$X_t(\omega) = \lim_{r\downarrow t, r\in\mathbb{Q}} X_r(\omega) = \lim_{r\downarrow t, r\in\mathbb{Q}} Y_r(\omega) = Y_t(\omega) \ \ \forall\, \omega\in\Omega',\ t\geq 0.$ $\square$

1.4 Def. Eine **Filterung** (in $\mathfrak{F}$) ist eine Familie $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t, t\geq 0)$ von σ–Algebren mit:

$\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F} \ \ \forall\, 0\leq s<t<\infty$. Man nennt $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{F},P)$ auch eine **stochastische Basis.**

Man definiert $\mathfrak{F}_\infty := \sigma(\cup_{s\geq 0}\mathfrak{F}_s) \subset \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_{t+} := \cap_{s>t}\mathfrak{F}_s$, $\mathbb{F}_+ = (\mathfrak{F}_{t+}, t\geq 0)$, also $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+}$.

$\mathbb{F}$ wird als **rechtsstetig** bezeichnet, wenn gilt: $\mathbb{F} = \mathbb{F}_+$.

Zu einem Prozeß X ist die **kanonische Filterung** $\mathbb{F}^X$ definiert durch $\mathfrak{F}_t^X := \sigma(X_s, s\leq t)$, $t\geq 0$.

1.5 Def. Ein Prozeß X heißt an eine Filterung $\mathbb{F}$ **adaptiert** [oder $\mathbb{F}$–adaptiert], wenn gilt: X_t ist $\mathfrak{F}_t$–mb $\forall$ t, d.h. $\mathbb{F}^X \subset \mathbb{F}$. X heißt $\mathbb{F}$–**progressiv**, wenn gilt: die Abbildung $[0,t]\times\Omega \ni (s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ ist $[0,t]\cap\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{F}_t$ – mb $\forall$ t.

Die Meßbarkeit auch in t wird etwa benötigt, wenn Integrale über Zeitintervalle oder der Prozeß zu einem zufälligen mb Zeitpunkt τ, also X_τ, betrachtet werden.

1.6 Lemma. (a) $\mathbb{F}_+$ ist wieder eine Filterung.

(b) $\mathbb{F}_+$ ist immer rechtsstetig, d.h. $(\mathbb{F}_+)_+ = \mathbb{F}_+$.

(c) Ist X $\mathbb{F}$–progressiv, so ist X $\mathbb{F}$–adaptiert und die Abbildung $[0,\infty)\times\Omega \ni (t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ ist $[0,\infty)\cap\mathfrak{B}_1\otimes\mathfrak{F}_\infty$ – mb.

Der Beweis ist sehr einfach.

1.7 Beispiel. Um sich klar zu machen, daß die Kenntnis von $\mathfrak{F}_{t+}$ mehr Information liefern kann als $\mathfrak{F}_t$, betrachten wir für einen reellwertigen Prozeß X das Ereignis A, daß der Prozeß nach t nach oben tendiert, also etwa: $A := \{\underline{\lim}_{h\downarrow 0, h\in\mathbb{Q}} \frac{1}{h}(X_{t+h}-X_t) \geq 0\}$. Dann gilt offenbar: $A \in \mathfrak{F}_{t+}$ aber in der Regel: $A \notin \mathfrak{F}_t$. Andere Beispiele werden im Zusammenhang mit Eintrittszeiten auftreten. □

1.8 Proposition. Ist X $\mathbb{F}$–adaptiert und rechtsstetig [oder linksstetig], so ist X $\mathbb{F}$–progressiv.

Beweis: Sei X etwa rechtsstetig. Für t>0 und $n\in\mathbb{N}$ definiert man Zeitintervalle $I^n_k := [\frac{k-1}{n}t, \frac{k}{n}t)$, $1\leq k<n$, und $I^n_n := [\frac{n-1}{n}t, t]$ sowie Prozesse $(X^n_s, 0\leq s\leq t)$ gemäß $X^n_s := X_{\frac{k}{n}t}$ für $s \in I^n_k$. Dann gilt für $B \in \mathfrak{S}$:

$$\{(s,\omega)\in [0,t]\times\Omega;\ X^n_s(\omega) \in B\} = \bigcup_{1\leq k\leq n} I^n_k \times X^{-1}_{\frac{k}{n}t}(B) \in [0,t]\cap\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{F}_t.$$

Also ist $(s,\omega) \mapsto X^n_s(\omega)$ $[0,t]\cap\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{F}_t$ – mb. Diese Eigenschaft überträgt sich auf $X_s(\omega) = \lim_{n\to\infty} X^n_s(\omega)$. □

1.9 Def. Sei $\mathbb{F}$ eine Filterung in $\mathfrak{F}$. Eine Abbildung $\tau : \Omega \mapsto [0,\infty]$ heißt eine $\mathbb{F}$–**Stoppzeit**, wenn gilt: $\{\tau\leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ $\forall$ t.

Offenbar ist jede konstante Abb. τ eine Stoppzeit und jede Stoppzeit eine Zva. Da $\mathbb{F}_+$ mit $\mathbb{F}$ auch eine Filterung ist, ist auch der Begriff der $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit erklärt. Er ist eine Abschwächung des Begriffs $\mathbb{F}$–Stoppzeit.

1.10 Lemma. Jede $\mathbb{F}$–Stoppzeit ist eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit.

Beweis: Es gilt: $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+}$. []

1.11 Lemma. Folgende Auusagen sind äquivalent für $\tau : \Omega \mapsto [0,\infty]$:

i) τ ist $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit;

ii) $\{\tau<t\} \in \mathfrak{F}_t \ \forall t$;

iii) $\tau\wedge t$ ist $\mathfrak{F}_t$–mb $\forall t$.

Beweis: "(ii) ⇒ (i)" $\{\tau \le t\} = \cap_{n>m} \{\tau < t + \frac{1}{n}\} \subset \mathfrak{F}_{t+(1/m)} \ \forall m \in \mathbb{N}$.
Offenbar gilt nun: $\cap_m \mathfrak{F}_{t+(1/m)} = \mathfrak{F}_{t+}$.
"(iii) ⇒ (ii)" $\{\tau < t\} = \{\tau\wedge t < t\} \in \mathfrak{F}_t$.
"(i) ⇒ (iii)" $\{\tau\wedge t \le s\} = \begin{cases} \{\tau \le s\} \in \mathfrak{F}_{s+} \subset \mathfrak{F}_t & \text{für } s<t \\ \Omega & \text{für } s\ge t \end{cases}$. []

1.12 Lemma. (a) Mit σ und τ sind auch $\tau\wedge\sigma$ und $\tau\vee\sigma$ $\mathbb{F}$–Stoppzeiten.

(b) Ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit und s>0, so ist τ+s eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit.

Beweis: a) $\{\tau\wedge\sigma \le t\} = \{\tau \le t\} \cup \{\sigma \le t\}$, $\{\tau\vee\sigma \le t\} = \{\tau \le t\} \cap \{\sigma \le t\}$.
b) $\{\tau+s \le t\} = \{\tau \le t-s\} \in \mathfrak{F}_{(t-s)+} \subset \mathfrak{F}_t$. []

1.13 Def. Für $B \in \mathfrak{S}$ ist die **Eintrittszeit** von X in B definiert als

$$\tau_B := \inf \{t\ge 0;\, X_t \in B\} \quad \text{mit } \inf \emptyset = \infty.$$

Für beliebige $B \in \mathfrak{S}$ ist die Meßbarkeit der Eintrittszeit kompliziert. Jedoch gilt:

1.14 Proposition. Sei X $\mathbb{F}$–adaptiert. Dann gelten:

(a) Ist X rechtsstetig [oder linksstetig] und ist B offen, so ist τ_B eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit.

(b) Ist X stetig und ist B abgeschlossen, so ist τ_B $\mathbb{F}$–Stoppzeit.

Beweis: a) Wir verwenden 1.11. Es gilt: $\{\tau_B < t\} = \cup_{s\in [0,t)} \{X_s \in B\} = \cup_{s\in [0,t)\cap\mathbb{Q}} \{X_s \in B\}$.
Dabei gilt die erste Gleichung stets und bei der zweiten stets "$\supset$". Ferner folgt "$\subset$" aus den Stetigkeitseigenschaften der Pfade und der Offenheit von B.
Aus der Adaptiertheit ergibt sich nun $\{\tau_B < t\} \in \mathfrak{F}_t$.

b) Sei $B_n := \{x \in S;\ d(x,B) < \frac{1}{n}\}$; dann ist B_n offen und wegen der Abgeschlossenheit von B gilt: $\cap_n B_n = B$. Es wird nun folgende Gleichung gezeigt werden:

(*) $\{\tau_B \le t\} = \{X_t \in B\} \cup \cap_n \{\tau_{B_n} < t\} \quad \forall\, t \ge 0.$

Dann folgt die Beh. aus (a).

"(*) $\subset$" Sei ω geg. mit $s := \tau_B(\omega) \le t$ Dann ex. nach der Infimumseigenschaft (s_n) mit $s_n \downarrow s$ und $X_{s_n}(\omega) \in B\ \ \forall\, n$. Wegen der Rechtsstetigkeit von X und der Abgeschlossenheit von B folgt: $X_s(\omega) \in B$. Ist $s = t$, so ist $X_t(\omega) \in B$. Ist $s < t$ (insbesondere $t > 0$), so gilt: $\tau_{B_n}(\omega) \le \tau_B(\omega) = s < t$.

"(*) $\supset$" Ist $X_t(\omega) \in B$, so folgt $\tau_B(\omega) \le t$. Sei nun $t > 0$.

Gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$: $\tau_{B_n}(\omega) < t$, so existiert eine Folge (s_n) mit $s_n < t$ und $X_{s_n}(\omega) \in B_n$.

Sei nun $r \in [0,t]$ ein Häufungspunkt von (s_n). Dann folgt: $X_r(\omega) \in B$ und damit $\tau_B(\omega) \le t$. $\square$

1. 15 Def. Ist τ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit, so heißt

$$\mathfrak{F}_\tau := \{ A \in \mathfrak{F}_\infty;\ A \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t \ \ \forall\, t \ge 0\}$$

σ–Algebra der τ–Vergangenheit.

Der Name ist gerechtfertigt aufgrund des folgenden Lemmas. Dabei reicht es statt $A \in \mathfrak{F}_\infty$ lediglich $A \cap \{\tau = \infty\} \in \mathfrak{F}_\infty$ zu zeigen.

1.16 Lemma. Seien τ und σ $\mathbb{F}$–Stoppzeiten. Dann gelten:

(a) $\mathfrak{F}_\tau$ ist eine σ–Algebra;

(b) $\mathfrak{F}_\tau = \{ A \subset \Omega;\ A \cap \{\tau = \infty\} \in \mathfrak{F}_\infty,\ A \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t \ \ \forall\, t \ge 0\}$;

(c) τ ist $\mathfrak{F}_\tau$–meßbar, insbesondere gilt: $\{\tau < \infty\} \in \mathfrak{F}_\tau$;

(d) ist $\tau = s$ konstant, so gilt: $\mathfrak{F}_\tau = \mathfrak{F}_s$;

(e) aus $\sigma \le \tau$ folgt $\mathfrak{F}_\sigma \subset \mathfrak{F}_\tau$.

Beweis: a) Die Abgeschlossenheit gegenüber der Komplementbildung z.B. folgt aus:

$$A^c \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le t\} - A \cap \{\tau \le t\}.$$

b) "$\supset$" Für A in dem rechten Mengensystem hat man: $A = A \cap \{\tau = \infty\} \cup \bigcup_n A \cap \{\tau \le n\} \in \mathfrak{F}_\infty$.

"$\subset$" Für $A \in \mathfrak{F}_\tau$ ergibt sich: $A \cap \{\tau = \infty\} = A \setminus \cup_n A \cap \{\tau \le n\}$.

c) Wir zeigen $\{\tau \le s\} \in \mathfrak{F}_\tau$ mit (b). Einmal gilt: $\{\tau \le s\} \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le s \wedge t\} \in \mathfrak{F}_t$ und zum anderen:

$$\{\tau \le s\} \cap \{\tau = \infty\} = \emptyset \in \mathfrak{F}_\infty.$$

d) ist leicht zu sehen.
e) Für $A \in \mathfrak{F}_\sigma$ gilt: $A \cap \{\tau \le t\} = A \cap \{\sigma \le t\} \cap \{\tau \le t\}$ mit $A \cap \{\sigma \le t\} \le \mathfrak{F}_t$. []

1.17 Def. Zu einer $\mathbb{F}$–Stoppzeit τ definieren wir X_τ mit Hilfe einer beliebig vorgegebenen $\mathfrak{F}_\infty$–mb Zva X_∞ gemäß $X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega)$. Der **gestoppte Prozeß** ist $X^\tau := \{X_{\tau\wedge t}, t \ge 0\}$.

Die Wahl von X_∞ wird keine Rolle spielen, da X_τ nur auf $\{\tau<\infty\}$ betrachtet wird. X_∞ kann als Konstante oder im Falle eines reellwertigen Prozesses z.B. gewählt werden als

$$X_\infty := \overline{\lim}_{\mathbb{Q}}\, X_t := \inf_n \sup_{t>n, t\in\mathbb{Q}} X_t \,.$$

Bedingungen dafür, daß X_τ eine Zva und X^τ ein stochastischer Prozeß ist, liefert:

1.18 Proposition. Sei X $\mathbb{F}$–progressiv.
(a) Ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit, so ist $X^\tau := \{X_{\tau\wedge t}, t \ge 0\}$ $\mathbb{F}$–progressiv;
(b) Ist τ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit, so ist X_τ $\mathfrak{F}_\tau$–meßbar.

Beweis: a) $$(s,\omega) \xrightarrow{f} (\tau(\omega)\wedge s, \omega) \xrightarrow{h} X_{\tau(\omega)\wedge s}(\omega)$$
$$\xrightarrow{\qquad\quad g \qquad\quad}$$

Sei t fest und $([0,t] \times \Omega, [0,t] \cap \mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{F}_t) =: (D, \mathfrak{D})$. Nach Voraussetzung ist

$$D \ni (s,\omega) \mapsto X_s(\omega) =: h(s,\omega) \quad \mathfrak{D}\text{–mb.}$$

Z.z. ist, daß auch $D \ni (s,\omega) \mapsto X_{\tau(\omega)\wedge s}(\omega) =: g(s,\omega)$ $\mathfrak{D}$–mb ist.

Wir werden g in $g = h \circ f$ faktorisieren. Zunächst ist in Hinblick auf 1.11

$$D \ni (s,\omega) \mapsto \tau(\omega)\wedge s = \tau(\omega)\wedge t \wedge s =: \varphi(\tau(\omega)\wedge t, s) \;\; \mathfrak{D} - [0,t]\cap\mathfrak{B}_1 - \text{mb};$$

denn φ ist sogar stetig. Somit ist auch

$$D \ni (s,\omega) \mapsto (\varphi(\omega), \omega)\; (\tau(\omega)\wedge s, \omega) =: f(s,\omega) \;\; \mathfrak{D}\text{–}\mathfrak{D}\text{–mb.}$$

b) Für $B \in \mathfrak{S}$ gilt: $\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \le t\} = \{X_{\tau\wedge t} \in B\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t$,
da nach (a) X^τ insbesondere adaptiert ist. Ferner gilt auch $\{X_\infty \in B, \tau = \infty\} \in \mathfrak{F}_\infty$.
Nach 4.16b haben wir also: $\{X_\tau \in B\} \in \mathfrak{F}_\tau$. []

1.19 Def. Ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit, so wird die **σ–Algebra $\mathfrak{F}_{\tau+}$ der $(\tau+)$–Vergangenheit** definiert als σ–Algebra der τ–Vergangenheit bzgl. $\mathbb{F}_+$, d.h.

$$\mathfrak{F}_{\tau+} := \{A \in \mathfrak{F}_\infty;\, A \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_{t+} \;\; \forall\, t\}.$$

1.20 Lemma. Sei X $\mathbb{F}$–progressiv. (a) Ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit, so gilt: X_τ ist $\mathfrak{F}_{\tau+}$–meßbar und

$$\mathfrak{F}_{\tau+} = \{A \in \mathfrak{F}_\infty;\ A \cap \{\tau < t\} \in \mathfrak{F}_t\ \ \forall\, t\}.$$

(b) Ist τ sogar eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit, so gilt: $\mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{F}_{\tau+}$.

Beweis: a) Verwende 1.18b und vgl. Beweis von 1.11. b) ist klar wegen $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+}$. []

1.21 Bemerkung. Ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit und ist (τ_n) eine Folge von $\mathbb{F}$–Stoppzeiten mit $\tau_n > \tau$. Dann gilt: $\mathfrak{F}_{\tau+} \subset \mathfrak{F}_{\tau_n}$ und , falls $\tau_n \downarrow \tau$ auf Ω, $\mathfrak{F}_{\tau+} = \cap_n \mathfrak{F}_{\tau_n}$.

Der Beweis ist eine einfache Übungsaufgabe. Ein Beispiel ist nach 4.12b: $\tau_n = \tau + \frac{1}{n}$.

Vergleiche dazu $\mathfrak{F}_{t+} = \cap_n \mathfrak{F}_{t+1/n}$. []

1.22 Lemma. Seien τ und σ $\mathbb{F}$–Stoppzeiten. Dann gilt:

(a) $\mathfrak{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathfrak{F}_\tau \cap \mathfrak{F}_\sigma$;

(b) $\{\sigma < \tau\}, \{\sigma \le \tau\} \in \mathfrak{F}_\tau \cap \mathfrak{F}_\sigma$.

Beweis: a) "$\subset$" folgt aus 1.16e. Sei nun $A \in \mathfrak{F}_\tau \cap \mathfrak{F}_\sigma$; dann hat man:

$$A \cap \{\tau\wedge\sigma \le t\} = A \cap \{\tau \le t\} \ \cup\ A \cap \{\sigma \le t\} \ \in \mathfrak{F}_t \ \ \forall\, t \ge 0.$$

b) Es gilt $\{\sigma \le \tau\} \in \mathfrak{F}_\tau$ wegen $\{\sigma \le \tau\} \cap \{\tau \le t\} = \{\sigma\wedge t \le \tau\wedge t\} \cap \{\tau \le t\} \cap \{\sigma \le t\} \in \mathfrak{F}_t$ nach 1.11;

ebenso $\{\sigma < \tau\} \in \mathfrak{F}_\tau$ wegen $\{\sigma < \tau\} \cap \{\tau \le t\} = \{\sigma\wedge t < \tau\wedge t\} \cap \{\tau \le t\} \cap \{\sigma < t\} \in \mathfrak{F}_t$.

Die übrigen Aussagen erhält man durch Komplementbildung. []

1.23 Satz. Sei Y ein an $\mathbb{F}_+$ adaptierter Prozeß, dessen Pfade P–f.s. reellwertig und stetig sind. Dann existiert eine an $\mathbb{F}_+$ adaptierte, reellwertige, rechtsstetige Version X von Y [deren Pfade also sämtlich reellwertig und rechtsstetig sowie natürlich wieder P–f.s. stetig sind].

Beweis. Sei $\Omega_0 \in \mathfrak{F}$ mit $P[\Omega_0] = 1$, so daß die Pfade $Y_.(\omega)$ für $\omega \in \Omega_0$ reellwertig und stetig sind.

(i) Die Schwierigkeit besteht darin, daß i.a. nicht $\Omega_0 \in \mathfrak{F}_{t+}\ \forall\, t \ge 0$ gilt.

Setze $X^n_t := \sum_{k=0}^{\infty} Y_{k/n} \cdot \mathbf{1}_{\{Y_{k/n} \in \mathbb{R}\}} \cdot \mathbf{1}_{[k/n,(k+1)/n)}(t)$.

Dann ist X^n an $\mathbb{F}_+$ adaptiert und hat reellwertige und rechtsstetige Pfade.

(ii) Es gilt für $\omega \in \Omega_0$, $0 < T < \infty$, wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $Y_.(\omega)$ auf $[0,T]$:

$$\sup_{0\le t\le T} |X^n_t(\omega) - Y_t(\omega)| \le \max_{0\le s\le T,\ t-s\le 1/n} |Y_s(\omega) - Y_t(\omega)| \ \longrightarrow\ 0 \ \ (n\to\infty).$$

(iii) Setze $\tau(\omega) := \inf\{T \geq 0;\ X^n(\omega)$ konvergiert nicht gleichmäßig auf $[0,T]\}$.
Dann ist $\tau = \infty$ auf Ω_0 gemäß (ii). Ferner ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit wegen

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{T < t,\, T \in \mathbb{Q}} \left\{\lim_N \sup_{m,n \geq N} \sup_{s \leq T, s \in \mathbb{Q}} |X^m_s - X^n_s| > 0\right\} \in \mathfrak{F}_t.$$

(iv) Setze $X_t = \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \cdot \lim X^n_t$ $(= \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \cdot \underline{\lim}\, X^n_t)$. Dann ist X an $\mathbb{F}_+$ adaptiert.

Ein Pfad $X_.(\omega)$ ist reellwertig und rechsstetig auf $[0,\tau(\omega))$ wegen der gleichmäßigen Konvergenz und konstant auf $[\tau(\omega),\infty)$. Ferner gilt $X_.(\omega) = Y_.(\omega)$ für $\omega \in \Omega_0$ wegen (ii). $\square$

1.24 Bemerkung. Man sagt: $\mathbb{F}$ genügt den **üblichen Bedingungen**, wenn $\mathbb{F}$ rechtsstetig ist und wenn gilt:

$$N \in \mathfrak{F}_0 \quad \text{für alle } N \in \mathfrak{F} \text{ mit, } P[N] = 0.$$

Unter diesen üblichen Bedingungen ist der obige Satz trivial. Wählt man Ω_0 wie im obigen Beweis, so hat man $\Omega_0 \in \mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_{t+}$ $\forall$ t. Man kann dann $X_.(\omega) = Y_.(\omega)$ für $\omega \in \Omega_0$ wählen und $X_.(\omega) = 0$ für $\omega \notin \Omega_0$. Dann ist X sogar ein stetiger Prozeß und adaptiert wegen

$$\{X_t \in B\} = \{Y_t \in B\} \cap \Omega_0 \cup \{0 \in B\} \cap \Omega_0^c. \ \square$$

1.25 Konvention. Ist Y ein an $\mathbb{F}_+$ adaptierter Prozeß, dessen Pfade P–f.s. reellwertig und stetig sind, so wählen wir immer eine an $\mathbb{F}_+$ adaptierte, reellwertige, rechtsstetige Version X von Y [deren Pfade also sämtlich reellwertig und rechtsstetig sowie natürlich wieder P–f.s. stetig sind].

§2 Markoff–Prozesse

Es sei wieder (S,d) ein metrischer Raum mit der Borelschen σ–Algebra $\mathfrak{S}$. $X = (X_t,\ t\geq 0)$ ist ein stochastischer Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ mit Zustandsraum S.

Nun werden Operatoren eingeführt, die den Übergang zwischen zwei Zeitpunkten, etwa Gegenwart und Zukunft, beschreiben.

2.1 Definition. Es heißt $\{\vartheta_t,\ t\geq 0\}$ eine Familie von **Shift–Operatoren**, falls

$\vartheta_t : \Omega \mapsto \Omega$ eine Abbildung ist mit

(2.2) $$X_s \circ \vartheta_t = X_{t+s} \quad \forall\ s,t.$$

[Hat man einen zeitdiskreten Markoff–Prozeß auf dem gemäß Ionescu–Tulcea konstruierten kanonischen Raum $\Omega = \mathop{\times}\limits_{0}^{\infty} S$, sind also X_n die Koordinatenvariablen [Projektionen], so ist immer eine Familie von Shift–Operatoren $\{\vartheta_n,\ n\geq 0\}$ gegeben durch $\vartheta_n(x_0,x_1,...) = (x_n,x_{n+1},...)$.]

Eine ähnliche Konstruktion kann man auch im zeitstetigen Fall machen.

Bei Markoff–Prozessen ist es günstig, wenn man für jeden möglichen Startpunkt $x\in S$ ein Modell hat.

2.3 Definition. $(X,\{P_x,\ x\in S\})$ ist eine **Markoff–Familie** (MF), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

$\{P_x\}$ ist eine Familie von W–Maßen auf $(\Omega,\mathfrak{F})$, sodaß mit der kanonischen Filterung $\mathbb{F}^X$ gilt:

i) $P_x[X_0 = x] = 1 \quad \forall\ x;$

ii) die Abbildung $x \mapsto P_x[X_s \in B]$ ist $\mathfrak{S}$–mb $\forall\ s, \forall\ B \in \mathfrak{S}$;

iii) $P_x[X_{t+s} \in B \mid \mathfrak{F}^X_t] = P_{X_t}[X_s \in B]$ f.s. $\forall$ x, t,s, B .

iv) es existiert eine Familie von Shift–Operatoren $\{\vartheta_t,\ t\geq 0\}$.

Eigenschaft (iii) ist gerade die **Markoff–Eigenschaft** (ME) und ist so zu lesen:

$P_{X_t}[X_s \in B]$ ist eine Version von $P_x[X_{t+s} \in B \mid \mathfrak{F}^X_t]$.

2.4 Lemma. In Definition 2.3 kann die ME (iii) ersetzt werden durch

iii)' $$P_x[X_{t+s} \in B \mid X_{t_1},...,X_{t_n},X_t] = P_{X_t}[X_s \in B] \quad \forall\ x, B, 0\leq t_1<...<t_n<t<t+s, n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis: "(iii) $\Rightarrow$ (iii)' " ist klar wegen $\sigma(X_t) \subset \sigma(X_{t_1},...,X_{t_n},X_t) \subset \mathfrak{F}^X_t$.

"(iii)' $\Rightarrow$ (iii)" wird mit einem Dynkin–Argument gezeigt.

$$\mathfrak{E} := \bigcup_{0\leq t_1<...<t_n\leq t, n\in\mathbb{N}_0} \sigma(X_{t_1},...,X_{t_n},X_t)$$

ist ein $\cap$–stabiles Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}_t^X$ und

$$\mathfrak{D} := \left\{ A \in \mathfrak{F}_t^X \,;\, P_x[A \cap \{X_{t+s} \in B\}] = {}_A\!\int P_{X_t}[X_s \in B]\, dP_x \right\}$$

ist offensichtlich ein Dynkinsystem, für das nach Vorausetzung $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{E}$ gilt. $\square$

2.5 Konstruktion einer d–dim. Brownschen Familie.

Sei $C[0,\infty) = \{\omega : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}\,,\ \omega \text{ stetig}\}$ versehen mit der Borel–σ–algebra $\mathfrak{C}$ und $W_t : C[0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ die Koordinatenabb. [Projektion], d.h. $W_t(\omega) = \omega(t)$. Dann ist $W = (W_t, t \geq 0)$ die Identität.

Das Wienermaß μ auf $(C[0,\infty),\mathfrak{C})$ ist dadurch charakterisiert, daß W auf $(C[0,\infty),\mathfrak{C},\mu)$ die standardisierte Brownsche Bewegung (BB) ist.

Es soll nun die d–dim. BB betrachtet werden.

Sei μ dazu das Wienermaß auf $(C[0,\infty),\mathfrak{C})$.

$\Omega := \mathop{\times}\limits_1^d C[0,\infty)$ kann mit der Menge der stetigen Abbildungen $\omega : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^d$ identifiziert werden;

$\mathfrak{F} := \bigotimes\limits_1^d \mathfrak{C}$.

$W^{(i)} : \Omega \mapsto C[0,\infty)$ bezeichne die i–te Projektion; also $W_t^{(i)}(\omega) := \omega^{(i)}$ für $\omega = (\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(d)}) \in \Omega$.

$W = (W^{(1)},\ldots,W^{(d)})$ ist die Identität auf Ω, $W_t := (W_t^{(1)},\ldots,W_t^{(d)})$.

$P_0 := \mathop{\times}\limits_1^d \mu$.

Auf dem W–Raum $(\Omega,\mathfrak{F},P_0)$ sind $W^{(1)},\ldots,W^{(d)}$ unabhängig mit $W^{(i)} \sim \mu$, d.h. $W^{(1)},\ldots,W^{(d)}$ sind unabhängige 1–dim. standardisierte Brownsche Bewegungen.

Somit ist W eine d–dim. standardisierte Brownsche Bewegung.

Durch eine Translation um $x \in \mathbb{R}^d$ erhält man den Prozeß $x + W = (x + W_t, t \geq 0)$. In der Definition einer MF sollte sich die Abhängigkeit vom Startpunkt jedoch im W–Maß ausdrücken. Dies kann auch erreicht werden. Offenbar ist die Abb. $x+W : (\Omega,\mathfrak{F}) \mapsto (\Omega,\mathfrak{F})$ stetig und somit mb . Also ist durch

(2.6) $\quad P_x := P_0(x+W)^{-1}$, d.h. $P_x[W \in \Gamma] := P_0[x+W \in \Gamma]$, $\Gamma \in \bigotimes\limits_1^d \mathfrak{C} = \mathfrak{F}$,

ein W–Maß P_x auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ definiert [mit $P_x W^{-1} = P_0(x+W)^{-1}$].

Für $x \in \mathbb{R}^d$ gilt: $P_x[W_0 = x] = P_0[x+W_0 = x] = P_0[W_0 = 0] = 1$.

x+W hat offenbar die gleichen Zuwächse wie W, also gilt:

$P_x[W_{t_1} - W_0 \in B_1,\ldots,W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \in B_1] = P_0[W_{t_1} - W_0 \in B_1,\ldots,W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \in B_1]$.

Eine Familie von Shift–Operatoren $\vartheta_t : \Omega \mapsto \Omega$ definiert man gemäß:

$$(\vartheta_t\omega)(s) := \omega(t+s)\ ,\ s \geq 0,\ \omega \in \Omega.$$

Dann hat man $W_s(\vartheta_t\omega) = W_s(\omega(t+\cdot)) = \omega(t+s) = W_{t+s}(\omega)$. $\square$

Damit ist eine Brownsche Familie gemäß folgender Definition konstruiert:

2.7 Definition. $(W, \{P_x, x\in\mathbb{R}^d\})$ heißt d–dim. **Brownsche Familie** (BF), falls W ein stochastischer Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F},P_x)$ ist, $x\in\mathbb{R}^d$, mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^d,\mathfrak{B}_d)$, sodaß gilt:

0) W ist stetig;

i) $P_x[W_0 = x] = 1 \;\forall x$;

ii) W hat stationäre und unabhängige Zuwächse unter P_x $\forall x$;

iii) $W_{t+s} - W_s \sim \bigtimes_1^d N(0,s)$ unter P_x $\forall s,t, \forall x$;

iv) es existiert eine Familie von Shift–Operatoren.

Es soll nun gezeigt werden, daß eine Brownsche Familie eine Markoff–Familie ist. Dazu brauchen wir noch einige Vorbereitungen.

2.8 Definition. Sei Y eine Zva auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit Werten in $(S,\mathfrak{S})$ und $\mathfrak{G}$ eine Unter–σ–Algebra von $\mathfrak{F}$. Dann heißt Y **unabhängig** von $\mathfrak{G}$, wenn gilt:

$$P[\{Y \in B\} \cap G] = P[Y \in B] \cdot P[G] \quad \forall\, G \in \mathfrak{G}, B \in \mathfrak{S}.$$

Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen besitzen die Markoff-Eigenschaft.

2.9 Lemma. Sei X ein d–dimensionaler Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit unabhängigen und stationären Zuwächsen. Dann gelten mit $Q(s,x;B) := P[x + X_s - X_0 \in B]$ $\left[= \int \mathbf{1}_B(x+X_s(\omega)-X_0(\omega)\, P[d\omega]\right]$:

(a) die Abb. $x \mapsto Q(s,x;B)$ ist mb $\forall s, \forall B \in \mathfrak{B}_d$;

(b) $X_{t+s} - X_t$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}_t^X$ $\forall s,t$;

(c) $P[X_{t+s} \in B \,|\, \mathfrak{F}_t^X] = Q(s,X_t;B)$ $(= P[X_{t+s} \in B \,|\, X_t]$ Markoff–Eigenschaft).

Bew. a) folgt leicht aus der Vorstufe zu Fubini.

b) Für $0<t_1<\ldots<t_n<t$, $n\in\mathbb{N}$, sind $X_0, X_{t_1} - X_0,\ldots,X_t - X_{t_n}, X_{t+s} - X_t$ unabhängig.

Somit ist $(X_0,X_{t_1},\ldots,X_{t_n},X_t)$ als Funktion von $(X_0,X_{t_1}-X_0,\ldots,X_t - X_{t_n})$ unabhängig von $X_{t+s} - X_t$.

Mit einem Dynkinargument folgt nun wie bei 2.4 die Behauptung.

c) Gemäß (b) ist $(\omega,B) \mapsto P[X_{t+s} - X_t \in B]$ $(= P[X_s-X_0 \in B])$ eine bedingte Verteilung von $X_{t+s} - X_t$ bzgl. $\mathfrak{F}_t^X$ [vgl. Sto. Pro. 1.7a]. Sei nun $f(x,y) := x+y$. Dann gilt $Q(s,x;B) = P[f(x,X_{t+s}-X_t) \in B]$. Es folgt dann, daß $P[X_{t+s} \in B \,|\, \mathfrak{F}_t^X] = P[f(X_t,X_{t+s}-X_s) \in B \,|\, \mathfrak{F}_t^X] = Q(s,X_t(\omega);B)$ eine bedingte Verteilung von X_{t+s} ist [vgl. Sto. Pro. 1.10h]. []

2.10 Proposition. Eine d–dim. Brownsche Familie ist eine MF.

Bew. Sei y der Startpunkt. Wir verwenden nur die Eigenschaften aus 2.7 und nicht 2.5. Die Punkte (i) und (iv) aus Def. 2.3 sind klar. Nun gilt $P_x[W_s \in B] = P_x[x + W_s - W_0 \in B] = \times_1^d N(x_i,s)\ [B] = P_y[x + W_s - W_0 \in B] =: Q(s,x;B)$. Insbesondere ist $P_x[W_s \in B]$ meßbar in x.
Lemma 2.9a,c (mit $W = X$, $P_y = P$) liefert nun (ii) und (iii) aus Def. 2.3. $\Box$

2.11 Definition. Sei W d–dim. standardisierte Brownsche Bewegung.
Für $b \in \mathbb{R}^d$ und eine invertierbare Matrix $\sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ sei $X := (X_t,\ t\geq 0) := (t\ b + \sigma\ W_t,\ t\geq 0)$; dann heißt $(X,\mathbb{F})$ **d–dim. Brownsche Bewegung mit Drift b und Dispersions– koeffizienten (–matrix)** σ.

Im Fall d = 1 etwa kann man sich vorstellen, daß ein Wind ein Partikel mit konstanter Geschwindigkeit b driften läßt und σ ein Maß für die Höhe der Amplituden der Zickzackkurven ist [welche etwa mit steigender Temperatur wachsen]. Dann gilt $X_t \sim N(bt, \sigma^2 t)$ und (X_t) hat unabhängige und stationäre Zuwächse.

2.12 Bemerkung. Wie in 2.5 kann mit etwas mehr technischem Aufwand eine Markoff–Familie konstruiert werden, die als Modell für eine **d–dim. Brownsche Bewegung mit Drift b und Dispersions–koeffizienten** σ und beliebigen Startpunkten $x \in \mathbb{R}^d$ dient.

2.13 Bemerkung. Ein **zusammengesetzter Poissonprozeß** $X = \{X_t,\ t\geq 0\}$ wird konstruiert mit Hilfe einer unabhängigen Folge $Z_1,Y_1,Z_2,Y_2,\ldots$ mit $Z_m \sim Exp(\lambda)$, und $Y_m \sim Q$, $m\geq 1$, für ein $0<\lambda<\infty$ und ein W–Maß Q auf $\mathbb{R}$. Setze $T_0 := 0$, $T_n := Z_1+\ldots+Z_n$,

$$N_t = n \text{ auf } \{T_n \leq t < T_{n+1}\},\ n\in\mathbb{N}_0, \quad X_t := \Sigma_0^{N_t} Y_m,\ t\geq 0.$$

Dann haben $(X,N) = \{(X_t,N_t),\ t\geq 0\}$ und somit $N = \{N_t,\ t\geq 0\}$ und $X = \{X_t,\ t\geq 0\}$ unabhängige und stationäre Zuwächse (zunächst ohne Beweis).
Wie in 2.5 kann eine Markoff–Familie konstruiert werden, die als Modell für einen zusammengesetzen Poissonprozeß mit beliebigen Startpunkten $x \in \mathbb{R}$ [oder $x \geq 0$ für $Y_m \geq 0$] dient. $\Box$

Es soll die ME bzgl. allgemeinerer Ereignisse der Zukunft untersucht werden.

2.14 Definition. Sei $S^{[0,\infty)} := \{\xi : [0,\infty) \mapsto S\}$ und $\pi_t : S^{[0,\infty)} \mapsto S$ die Koordinatenabb. [Projektion] mit $\pi_t(\xi) := \xi(t)$. Ferner sei $\otimes_t \mathfrak{S} = \otimes_{0\leq t<\infty} \mathfrak{S} := \sigma(\pi_t,\ t\geq 0)$.
Bei einem Prozeß X stehe $X_{t+\cdot}$ für den Prozeß $X_{t+\cdot} := (X_{t+s},\ s\geq 0) : \Omega \mapsto S^{[0,\infty)}$.

2.15 Lemma. Sei $(\Omega,\mathfrak{F})$ ein Meßraum und $X = (X_t, t\geq 0)$ eine Familie von Abb. $X_t : \Omega \mapsto S$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) X_t ist $\mathfrak{F}$–$\mathfrak{S}$–mb $\forall$ t, d.h. X ist ein stochastischer Prozeß;

ii) $X : \Omega \mapsto S^{[0,\infty)}$ ist $\mathfrak{F} - \underset{t}{\otimes}\mathfrak{S}$ – mb;

iii) $X : \Omega \mapsto D$ ist $\mathfrak{F} - D \cap \underset{t}{\otimes}\mathfrak{S}$ – mb $\forall$ D mit $X(\Omega) \subset D \subset S^{[0,\infty)}$.

Ein Beispiel für D in (iii) wäre $D = C[0,\infty)$ bei $S = \mathbb{R}$, dann gilt: $D \cap \underset{t}{\otimes}\mathfrak{S} = \mathfrak{C}$.

Beweis von 2.15. "(i)⇒(ii)" Diese Richtung folgt aus: $\cup_t \sigma(\pi_t)$ ist Erzeugendensystem von $\underset{t}{\otimes}\mathfrak{S}$.
"(ii) ⇒ (iii)" folgt aus $X^{-1}(D \cap A) = X^{-1}(A)$.
Die Richtungen "(ii) ⇒ (i)" und "(iii) ⇒ (ii)" sind offensichtlich. $\square$

Gemäß 2.15 ist die Verteilung PX^{-1} von X definiert. Als kanonischer Prozeß würde sich also wie im zeitdiskreten Fall $\pi = (\pi_t)$ auf $(S^{[0,\infty)}, \underset{t}{\otimes}\mathfrak{S}, PX^{-1})$ anbieten. Da π die Identität auf $S^{[0,\infty)}$ ist, hat π dann die gleiche Verteilung wie X. Allerdings hat dann π keine besonderen Pfadeigenschaften, die im zeitstetigen Fall jedoch wichtig werden wie §1 zeigt. Insofern ist dies Modell für den zeitstetigen Fall oft nicht günstig. Gemäß 2.15 ist $X_{t+\cdot} : \mathfrak{F} \mapsto \underset{s}{\otimes}\mathfrak{S}$ meßbar.

2.16 Satz. Sei $(X,\{P_x\})$ MF, so daß die Pfade von $X_{t+\cdot}$ in einer Pfadmenge $D \subset S^{[0,\infty)}$ liegen $\forall$ t. Dann gelten für $\Gamma \in D \cap \underset{s}{\otimes}\mathfrak{S}$:

(i) die Abb. $x \mapsto P_x[X \in \Gamma]$ ist mb, also ist $(x,A) \mapsto P_x[A]$ eine ÜW von S nach $\mathfrak{F}^X_\infty = \sigma(X)$;

(ii) $P[X_{t+\cdot} \in \Gamma | \mathfrak{F}^X_t] = P_{X_t}[X \in \Gamma]$ f.s. $\forall$ t.

Beweis: Sei $\Gamma \in D \cap \underset{t}{\otimes}\mathfrak{S}$, also $\Gamma = D \cap \Gamma'$ mit $\Gamma' \in \underset{t}{\otimes}\mathfrak{S}$. Dann gilt: $\{X_{t+\cdot} \in \Gamma\} = \{X_{t+\cdot} \in \Gamma'\}$. Also können wir o.E. $D = S^{[0,\infty)}$ wählen.
Die Menge $\{ \Gamma \in \underset{t}{\otimes}\mathfrak{S} ;$ es gelten (i) und (ii) $\}$ ist ein Dynkinsystem. Somit genügt es, (i) und (ii) für Elemente aus einem ∩–stabilen Erzeugendensystem zu zeigen. Ein solches bilden die Mengen der Form: $\Gamma = \{\pi_{s_1} \in B_1,...,\pi_{s_n} \in B_n\}$. Wir zeigen noch allgemeiner:

(2.17) $\forall\, n\in\mathbb{N}, 0\leq s_1<...<s_n<\infty,\ f_m : S \mapsto [0,\infty)$ mb , $1\leq m\leq n$, gelten:

(i)' $x \mapsto E_x[\mathbf{\Pi}_1^n f_m(X_{s_m})]$ ist mb;

(ii)' $E_x[\mathbf{\Pi}_1^n f_m(X_{t+s_m}) | \mathfrak{F}^X_t] = E_{X_t}[\mathbf{\Pi}_1^n f_m(X_{s_m})]$ f.s.

Der Beweis wird induktiv geführt. Im Falle n=1 gelten (i)'und (ii)' für Indikatorfunktionen $f_1 = \mathbf{1}_B$.
Der allgemeine Fall folgt mit maßtheoretischer Induktion.
"1,n → n+1" Sei dazu $A \in \mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+s_m}$. Wir verwenden den Fall n=1:

$$E_x[f_{n+1}(X_{t+s_{n+1}})\,|\,\mathfrak{F}^X_{t+s_n}] = E_{X_{t+s_n}}[f_{n+1}(X_{s_{n+1}-s_n})] =: g(X_{t+s_n})$$

und nun den Fall n:

$$\int_A \mathbf{\Pi}_1^{n+1} f_m(X_{t+s_m})\, dP_x = \int_A E[\mathbf{\Pi}_1^n f_m(X_{t+s_m})\cdot f_{n+1}(X_{t+s_{n+1}})\,|\,\mathfrak{F}^X_{t+s_n}]\, dP_x$$

$$= \int_A \mathbf{\Pi}_1^n f_m(X_{t+s_m})\cdot g(X_{t+s_n})\, dP_x$$

$$=: \int_A E_x[\mathbf{\Pi}_1^n \tilde{f}_m(X_{t+s_m})\,|\,\mathfrak{F}^X_t]\, dP_x$$

$$= \int_A E_{X_t}[\mathbf{\Pi}_1^n f_m(X_{s_m})\cdot g(X_{s_n})]\, dP_x$$ nach Induktionvorauss. mit $\tilde{f}_n := f_n\cdot g$, $\tilde{f}_m := f_m$, m<n.

Dabei gilt insbesondere (mit $A = \Omega$, t=0): $E_x[\mathbf{\Pi}_1^{n+1} f_m(X_{s_m})] = E_x[\mathbf{\Pi}_1^n f_m(X_{s_m})\cdot g(X_{s_n})]$.

Also ist $x \mapsto E_x[\mathbf{\Pi}_1^{n+1} f_m(X_{s_m})]$ nach Induktionsvorauss. mb und es gilt (ii)' für n+1. []

2.18 Korollar. Sei $(X,\{P_x\})$ eine MF und $Y : \Omega \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{F}^X_\infty$–mb und nach unten beschränkt.

Dann gilt: $E_x[Y\circ\vartheta_t\,|\,\mathfrak{F}^X_t] = E_{X_t}[Y]$ f.s. $\forall\, t\geq 0,\ x\in S$.

Dabei ist $\vartheta_t : (\Omega,\mathfrak{F}) \mapsto (\Omega,\mathfrak{F}^X_\infty)$ meßbar.

Der **Beweis** folgt mit maßtheoretische Induktion leicht aus 2.16
wegen $\mathfrak{F}^X_\infty = \sigma(X)$, $Y = f\circ X$ und $X\circ\vartheta_t = X_{t+\cdot}$. []

2.19 Definition. Ist $(X,\{P_x\})$ MF, so heißen

$$(x,B) \mapsto P(t,x;B) := P_x[X_t \in B],\ t\geq 0,$$

die zugehörigen **Übergangswahrscheinlichkeiten (ÜW)**.

2.20 Korollar. Sei $(X,\{P_x\})$ MF mit ÜW $P(t,\cdot;\cdot)$. Dann gilt:

(a) $P(t+s,x,B) = \int P(t,x;dy)\, P(s,y,B)$ (**Chapman–Kolmogoroff–Gleichung**);

(b) $P_x[X_{t_1} \in B_1,\dots,X_{t_n} \in B_n] =$

$$\int_{B_1} P(t_1,x;dx_1) \dots \int_{B_{n-1}} P(t_{n-1}-t_{n-2},x_{n-2};dx_{n-1})\, P(t_n-t_{n-1},x_{n-1};B_n)$$

$$\forall\, 0\leq t_1<\dots<t_n < \infty,\ B_m\in \mathfrak{S},\ 0\leq m\leq n \in \mathbb{N}.$$

Der **Beweis** ist eine Übungsaufgabe.

2.21 Beispiel für $Y\circ\vartheta_t$.

Sei $\tau := \tau_B := \inf\{s\geq 0;\ X_s\in B\}$, $B\subset S$, dann ergibt sich:

$t + \tau\circ\vartheta_t = t + \inf\{s\geq 0;\ X_s\circ\vartheta_t \in B\} = \inf\{t+s;\ s\geq 0,\ X_{t+s}\in B\} = \inf\{s\geq t;\ X_s \in B\} =: \tau_t$.

Damit erhält man: $X_\tau\circ\vartheta_t = X_{t+\tau\circ\vartheta_t}$ wegen $X_\tau(\vartheta_t\omega) = X_{\tau(\vartheta_t\omega)}(\vartheta_t\omega) = X_{\tau_t(\omega)-t}(\vartheta_t\omega) = X_{\tau_t}(\omega)$ für $\tau_t(\omega) < \infty$. Ist $(X,\{P_x\})$ eine MF, ist X rechtsstetig und B offen, so ist $\tau = \tau_B$ nach 1.14a eine $\mathbb{F}^X_+$–Stoppzeit und es gilt gemäß 2.18:

(2.22) $$P_x[\tau_t<t+u\,|\,\mathfrak{F}^X_t] = P_{X_t}[\tau < u],$$

denn wir haben $\mathbf{1}_{\{\tau_t < t+u\}} = \mathbf{1}_{\{\tau < u\}}\circ\vartheta_t$ mit $Y := \mathbf{1}_{\{\tau < u\}}$, $\{\tau < u\} \in \mathfrak{F}^X_u \subset \mathfrak{F}^X_\infty$. []

2.23 Bemerkung. Die allgemeine Definition eines Markoff–Prozesses kann folgendermaßen gegeben werden.

$(X,\mathbb{F})$ heißt **Markoff–Prozeß (MP)** auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit Zustandsraum $(S,\mathfrak{S})$, falls gilt:

(1) X ist eine stochastischer Prozeß;

(2) $\mathbb{F}$ ist eine Filterung in $\mathfrak{F}$;

(3) X ist $\mathbb{F}$–adaptiert;

(4) es existiert eine MF $(X^o,\{P_x,\ x\in S\})$ mit der Markoff–Eigenschaft:

(ME) $$P[X_{t+s} \in B\,|\,\mathfrak{F}_t] = P_{X_t}[X^o_s \in B] \quad \text{f.s. } \forall\ s,t,\ B\in\mathfrak{S}.$$

$(X^o,\{P_x,\ x\in S\})$ heißt **interne MF** und PX_0^{-1} heißt **Startverteilung**.

In der Regel ist die interne MF ein auf einem kanonischen Raum definiertes Modell für den vorliegenden MP, das für jeden möglichen Startpunkt konstruiert werden kann.

Üblicherweise geht man dazu von ÜW $P(t,x,B)$ aus, die die Chapman–Kolmogoroff–Gleichungen 2.20a erfüllen. An Stelle von (4) fordert man dabei:

(ME)' $$P[X_{t+s} \in B\,|\,\mathfrak{F}_t] = P(s,X_t,B) \quad \text{f.s. } \forall\ s,t,\ B\in\mathfrak{S}.$$

Für die Existenz wird dann die zeitstetige Version des Satzes von Kolmogoroff benötigt. In (ME) wird hier gleich die Existenz einer MF vorausgesetzt. Die ÜW können ohnehin nur in den seltensten Fällen, so bei der BB und beim Poisson–Prozeß, explizit angegeben werden. In den Beispielen, die wir betrachten, kann in der Tat die MF auch ohne Benutzung des Satzes von Kolmogoroff konstruiert werden. So gibt es verschiedene schöne Beweise für die Existenz einer Brownschen Bewegung.

Durch (ME) sind auch die ÜW gemäß $P(t,x,B) = P_x[X^o_t\in B]$ gegeben.

[Der Satz von Kolmogoroff wird bei diesem Zugang nicht benötigt.]

§3 Starke Markoff–Prozesse

Seien (S,d) und $(S,\mathfrak{S})$ wie in §2. Jetzt soll die Markoff–Eigenschaft (ME) mit einer Stoppzeit τ als Gegenwart formuliert werden. Diese starke ME gilt im zeitdiskreten Fall stets, kann aber umgangen werden wegen der Zerlegung: $\{\tau<\infty\} = \cup_n \{\tau=n\}$.

Es wird eine Beschränkung auf $\{\tau<\infty\}$ nötig sein, da nur dort zukünftige Ereignisse nach τ in natürlicher Weise betrachtet werden können. Dazu die

3.1 Definition. Sei $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ und eine Unter–σ–Algebra $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{F}$ gegeben. Für $G\in\mathfrak{G}$, $C\in G\cap\mathfrak{F}$ heißt f **Version von $P[C|\mathfrak{G}]$ auf G** (kurz $P[C|\mathfrak{G}] = f$ f.s. auf G), falls $f : G \mapsto [0,1]$ $G\cap\mathfrak{G}$–mb ist und falls gilt:

(3.2) $$P[A\cap C] = \int_A f\, dP\,,\ A \in G\cap\mathfrak{G}, \Leftrightarrow P[\hat{A}\cap G\cap C] = \int_{\hat{A}\cap G} f\, dP\,,\ \hat{A} \in \mathfrak{G}.$$

Entsprechend ist **eine Version von $E[Y|\mathfrak{G}]$ auf G** definiert.

Die Restriktion von $P[C\cap G|\mathfrak{G}]$ auf G, also $P[C\cap G|\mathfrak{G}]\big|_G$, ist eine solche Version von $P[C|\mathfrak{G}]$ auf G .

3.3 Definition. $(X,\{P_x\})$ heißt eine **starke MF** auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ mit Zustandsraum $(S,\mathfrak{S})$, falls X $\mathbb{F}^X$–progressiv ist und für $\mathbb{F}^X_+$–Stoppzeiten τ, $B\in\mathfrak{S}$, $s\geq 0$, gilt:

$$P[X_{\tau+s}\in B|\mathfrak{F}^X_{\tau+}] = P_{X_\tau}[X_s \in B] \text{ f.s. auf } \{\tau<\infty\} \quad \textbf{(starke ME)}.$$

Die Def. ist sinnvoll, denn $\tau+s$, $s\geq 0$, ist $\mathbb{F}^X_+$–Stoppzeit nach 1.12b. also gilt:

$G := \{\tau < \infty\} \in \mathfrak{G} := \mathfrak{F}^X_{\tau+}$, $C := \{X_{\tau+s}\in B,\tau<\infty\} \in \mathfrak{F}^X_{(\tau+s)+} \subset \mathfrak{F}^X_\infty \subset \mathfrak{F}$ gemäß 1.18.

$P_{X_\tau}[X_s \in B]$ ist ferner $\{\tau<\infty\}\cap\mathfrak{F}_{\tau+}$– mb nach 1.16c, 1.18b.

Die Formulierung der starken ME mit $\mathbb{F}^X_+$ ist stärker als die mit $\mathbb{F}^X$. Jede starke MF ist MF; wähle $\tau\equiv t$.

3.4 Satz. Sei $(X,\{P_x\})$ starke MF, so daß die Pfade von $X_{t+\cdot}$ in einer Pfadmenge $D \subset S^{[0,\infty)}$ liegen $\forall$ t.

Dann gilt für $\mathbb{F}^X_+$–Stoppzeiten τ, $\Gamma \in D \cap \otimes_t \mathfrak{S}$:

$$P_x[X_{\tau+\cdot} \in \Gamma|\mathfrak{F}^X_{\tau+}] = P_{X_\tau}[X \in \Gamma] \text{ f.s. auf } \{\tau<\infty\}.$$

Beweis: Es ist $X_{\tau+s}$ $\{\tau<\infty\}\cap\mathfrak{F} - \mathfrak{S}$ mb; somit ist $X_{\tau+\cdot}$ $\{\tau<\infty\}\cap\mathfrak{F} - D \cap \otimes_t \mathfrak{S}$ – mb nach 2.15. Ferner ist nach 2.16 $x \mapsto P_x[X \in \Gamma]$ mb und somit $P_{X_\tau}[X \in \Gamma]$ $\{\tau < \infty\}\cap\mathfrak{F}_{\tau+}$– mb. Jetzt kann der Beweis wie in 2.15 geführt werden. Dabei wird die starke ME auch für $\tau+s_n$ benutzt. $\Box$

3.5 Definition. Sei X stoch. Prozeß auf Ω, $\tau : \Omega \mapsto [0,\infty]$ eine Abb., $\{\vartheta_t,\ t\geq 0\}$ eine Familie von Shiftoperatoren. Dann wird $\vartheta_\tau : \{\tau<\infty\} \mapsto \Omega$ definiert durch

$$\vartheta_\tau = \vartheta_t \text{ auf } \{\tau=t\}\,,\ 0\leq t<\infty.$$

3.5* Folgerung. $X\circ\vartheta_\tau = X_{\tau+\cdot}$ auf $\{\tau<\infty\}$.

Für $\omega \in \{\tau = t\}$ gilt nämlich: $X(\vartheta_\tau\omega) = X(\vartheta_t\omega) = X_{t+\cdot}(\omega) = X_{\tau(\omega)+\cdot}(\omega) =: X_{\tau+\cdot}(\omega)$.

Im nächsten Satz wird die starke ME formuliert für einen Fall, wo der Abstand $t-\tau$ zwischen der Gegenwart τ und der Zukunft $t = \tau + (t-\tau)$ zufallsabhängig ist. Dies kann zurückgeführt werden auf die Tatsache, daß bei der Bildung von $E[\ldots|\mathfrak{F}^X_{\tau+}]$ die $\mathfrak{F}^X_{\tau+}$–mb Zva τ als Konstante s betrachtet werden kann und man somit wieder in der Situation von Def. 3.3 ist.

3.6 Satz. Sei $(X,\{P_x\})$ eine starke MF auf $(\Omega,\mathfrak{F})$, τ $\mathbb{F}^X_+$–Stoppzeit. Dann gilt:

Für $B \in \mathfrak{S}$ ist $(s,x) \mapsto P(s,x,B) = P_x[X_s \in B]$ $[0,\infty)\cap\mathfrak{B}_1\otimes\mathfrak{S}$–mb , und eine Version

von $P_x[X_t \in B|\mathfrak{F}^X_{\tau+}]$ auf $\{\tau\le t\}$ ist $P(t-\tau,X_\tau;B)$, $x\in S$.

Wir beweisen eine noch allgemeinere Aussage.

3.7 Lemma. Sei $(X,\{P_x\})$ eine starke MF auf $(\Omega,\mathfrak{F})$, τ $\mathbb{F}^X_+$–Stoppzeit, $Y : \bar{\mathbb{R}}\times\Omega \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ $\bar{\mathfrak{B}}\otimes\mathfrak{F}^X_\infty$– mb und nach unten beschränkt. Dann gilt für $f(s,x) := E_x[Y(s,\cdot)]$, $s \in \bar{\mathbb{R}}$, $x \in S$: f ist $\bar{\mathfrak{B}}\otimes\mathfrak{S}$–mb und

$$E_x[Y(\tau,\vartheta_\tau)|\mathfrak{F}^X_{\tau+}] = f(\tau,X_\tau) \text{ f.s. auf } \{\tau<\infty\} , x\in S.$$

Spezialfall. Ist wie 2.18 Y unabhängig von s, also $Y : \Omega \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{F}^X_\infty$– mb, $Y \ge 0$, so folgt:

$$E_x[Y\circ\vartheta_\tau|\mathfrak{F}^X_{\tau+}] = E_{X_\tau}[Y] \text{ f.s. auf } \{\tau<\infty\} , x\in S.$$

Beweis von 3.7**:** Wir haben gemäß 3.5*

(*) $\quad \mathfrak{F}^X_\infty \ni \{X_{\tau+\cdot} \in \Gamma, \tau<\infty\} = \vartheta_\tau^{-1}(X^{-1}(\Gamma)) \cap \{\tau<\infty\}$, $\Gamma \in \underset{t}{\otimes}\mathfrak{S}$.

Von 2.15 wissen wir $\mathfrak{F}^X_\infty = \sigma(X) = \{X^{-1}(\Gamma);\, \Gamma \in \underset{t}{\otimes}\mathfrak{S}\}$, also ist

$$\vartheta_\tau : \{\tau < \infty\}\cap\mathfrak{F}^X_\infty \mapsto \mathfrak{F}^X_\infty \text{ meßbar.}$$

Für $A \in \mathfrak{F}^X_\infty$ gilt also gemäß 3.4:

(3.4)* $\quad P_x[\vartheta_\tau^{-1}(A)|\mathfrak{F}^X_{\tau+}] = P_{X_\tau}[A]$ auf $\{\tau<\infty\}$ für $A \in \mathfrak{F}^X_\infty$, $x \in S$.

Dabei gilt für $Q(x;A) := P_x[A]$, $A\in\mathfrak{F}^X_\infty$, gemäß 2.16(i): (**) Q ist eine ÜW von $(S,\mathfrak{S})$ nach $(\Omega,\mathfrak{F}^X_\infty)$.

Betrachte erst $Y(s,\omega) = \mathbf{1}_C(s)\cdot\mathbf{1}_A(\omega)$, $C \in \bar{\mathfrak{B}}$, $A \in \mathfrak{F}^X_\infty$.

Dann gilt $f(s,x) = \mathbf{1}_C(s)\cdot P_x[A]$ und somit: f ist $\bar{\mathfrak{B}}\otimes\mathfrak{S}$– mb und nach (3.4)* gilt:

$$E[Y(\tau,\vartheta_\tau)|\mathfrak{F}^X_{\tau+}] = \mathbf{1}_C(\tau)\cdot P[\vartheta_\tau^{-1}(A)|\mathfrak{F}^X_{\tau+}] = \mathbf{1}_C(\tau)\cdot P_{X_\tau}[A],$$

denn τ ist nach 1.16c $\mathfrak{F}^X_{\tau+}$–mb. Der Fall $Y(s,\omega) = \mathbf{1}_B(s,\omega)$, $B \in \bar{\mathfrak{B}}\otimes\mathfrak{F}^X_\infty$ folgt jetzt mit einem Dynkin–Argument, und der allgemeine Fall folgt schließlich mit maßtheoretischer Induktion. $\square$

Beweis von 3.6. Sei t fest. Für $s \in \bar{\mathbb{R}}$, $\omega \in \Omega$ betrachte $Y(s,\omega) := \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t-s)\cdot \mathbf{1}_B(X_{t-s}(\omega))$; dann ist Y $\bar{\mathfrak{B}}\otimes\mathfrak{F}^X_\infty$–mb; denn wegen der Progressivität von X ist $(u,\omega) \mapsto \mathbf{1}_B(X_u(\omega))$ $\mathfrak{B}_1\otimes\mathfrak{F}^X_\infty$–mb (vgl 1.6c).

Es gilt $Y(s,\vartheta_\tau) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t-s)\cdot \mathbf{1}_B(X_{\tau+t-s})$ nach 3.5* und $Y(\tau,\vartheta_\tau) = \mathbf{1}_{\{\tau\le t\}}\cdot \mathbf{1}_B(X_t)$.

Mit $f(s,x) = E_x[Y(s,\cdot)] = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t-s)\cdot P(t-s,x,B)$ folgt die Beh. $\square$

Es folgt ein hinreichendes Kriterium für die starke ME.

3.8 Satz. Sei $(X,\{P_x\})$ rechtsstetige MF auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ mit ÜW $P(s,x;\cdot)$. Dann ist $(X,\{P_x\})$ eine starke MF unter der folgenden **Feller–Bedingung**:

$x \mapsto P(s,x;\cdot)$ ist w–folgenstetig, d.h. $P(s,x_n;\cdot) \xrightarrow{w} P(s,x_0;\cdot)$ für $x_n \to x_0$ $\forall$ s.

Beweis: Für $f \in C_b(S)$ ist nach Vorauss. $x \mapsto E_x[f(X_s)]$ stetig und somit $t \mapsto E_{X_t}[f(X_s)]$ rechtsstetig.

Sei τ $\mathbb{F}^X_+$–Stoppzeit und $\tau_n := \frac{k}{n}$ für $\frac{k-1}{n} \le \tau < \frac{k}{n}$ bw. $\tau_n := \infty$ für $\tau=\infty$.

[Dann ist τ_n übrigens $\mathbb{F}$–Stoppzeit mit abzählbar vielen Werten. Für solche gilt – wie im zeitdiskreten Fall – die starke ME stets. Dies soll hier gerade ausgenutzt werden.] Es gilt:

$$\tau \le \tau_n \le \tau + \frac{1}{n} \text{ und } f(X_{\tau_n+s}) \to f(X_{\tau+s}) \text{ für } n\to\infty \text{ auf } \{\tau<\infty\}.$$

Sei nun der Startpunkt x fest gewählt und $P := P_x$ sowie $A \in \mathfrak{F}^X_{\tau+}$; dann ist $A^n_k := A \cap \{\frac{k-1}{n} \le \tau < \frac{k}{n}\} \in \mathfrak{F}_{k/n}$ gemäß 1.20 und wegen der ME:

$$\int_{A^n_k} f(X_{\tau_n+s})\,dP = \int_{A^n_k} f(X_{k/n+s})\,dP$$
$$= \int_{A^n_k} E_{X_{k/n}}[f(X_s)]\,dP = \int_{A^n_k} E_{X_{\tau_n}}[f(X_s)]\,dP.$$

Durch Summation über k ergibt sich mit $A_\tau := A \cap \{\tau<\infty\}$:

$$\int_{A_\tau} f(X_{\tau_n+s})\,dP = \int_{A_\tau} E_{X_{\tau_n}}[f(X_s)]\,dP.$$

Für $n\to\infty$ folgt wegen maj. Konv.:

$$\text{(3.9)} \qquad \int_{A_\tau} f(X_{\tau+s})\,dP = \int_{A_\tau} E_{X_\tau}[f(X_s)]\,dP.$$

Die starke ME ergibt sich nun, wenn man den Schluß von $f\in C_b(S)$ auf $\mathbf{1}_B$ durchführen kann. Sei dazu o.E. $P[A_\tau]>0$. Mit definieren jetzt W–Maße μ und ν auf $\mathfrak{S}$

$\mu[B] := {}_{A_\tau}\!\int \mathbf{1}_B(X_{\tau+s})\, dP / P[A_\tau]$ und $\nu[B] := {}_{A_\tau}\!\int E_{X_\tau}[\mathbf{1}_B(X_s)]\, dP / P[A_\tau]$,

so daß die linke Seite von (3.9) gerade $\int f d\mu \cdot P[A_\tau]$ und die rechte Seite $\int f d\nu \cdot P[A_\tau]$ ist. Dies erhält man mit maßtheoretischer Induktion. Nach (3.9) gilt $\int f d\mu = \int f d\nu \ \forall f \in C_b(S)$.

Dann folgt $\mu = \nu$ [vgl. W.th. I, Lemma 17.2. []

Die Ergebnisse sollen nun auf die BB angewendet werden.

3.10 Korollar. Eine d–dim. BF $(W, \{P_x, x \in \mathbb{R}^d)$ ist eine starke MF.

Beweis: Sei $f \in C_b(S)$. Es ist z.z.: $x \mapsto \int f(y)\, P(s,x,dy) = E_x[f(W_s)] = E_0[f(x + W_s))]$ ist stetig; dies folgt aber sofort wegen maj. Konv. []

Es sollen nun **Eigenschaften der BB** mit Hilfe der starken ME hergeleitet werden.

Sei dazu $(W, \{P_x\})$ die in 3.5 konstruierte BF auf $\Omega = C[0,\infty)^d$, $P := P_0$. Gemäß **3**.10 ist $(W, \{P_x\})$ eine starke MF. Wegen $W = id_\Omega$ und $P_x = P(x+W)^{-1}$ gilt $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^W_\infty$ und für die zugehörigen ÜW

$$P(s,x;B) = P_x[W_s \in B] = P[x + W_s \in B] \ ,$$

und die starke ME läßt sich wie folgt schreiben (vgl. 3.7):

(3.11) Sei $Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ $\mathfrak{F}$–mb und nach unten beschränkt,

$h(x) := E_x[Y] = E[Y \circ (x+W)]$.

$E_x[Y \circ \vartheta_\tau | \mathfrak{F}_{\tau+}] = E_{W_\tau}[Y] = h(W_\tau)$ auf $\{\tau < \infty\}$ $\forall\, \mathbb{F}_+$–Stoppzeiten τ.

Es sollen nun mit Hilfe der starken ME, insbesondere mit dem **Spiegelungsprinzip**, die Verteilungen von gewissen Zva bestimmt werden, die zu einer BB W definiert sind.

3.12 Definition. Sei d=1.

$\tau_y := \inf\{t \geq 0, W_t > y\}$ ist die **Überschreitungszeit–/ Passierzeit des Niveaus** $y > 0$,

$M_t := \max_{0 \leq s \leq t} W_s$ ist das **laufende Maximum**,

$(|W_t|, t \geq 0)$ ist die (bei Null) **reflektierte BB**.

Nach 1.14a gilt:

(3.13) τ_y ist $\mathbb{F}^W_+$–Stoppzeit,

$\{\tau_y < t, W_0 = 0\} = \{M_t > y, W_0 = 0\}$, $W_{\tau_y} = y$ auf $\{W_0 = 0\}$.

3.14 Proposition. Für $t > 0$, $x \le y$, $y > 0$ gelten folgende Aussagen:

(0) $W_t \sim N(0,t) \sim \sqrt{t} \cdot W_1$ mit $W_1 \sim N(0,1)$ unter P;

(a) $P[W_t \le x, M_t \le y] = P[x-2y < W_t \le x]$, $x \le y$;

3.15 Satz. Für $t > 0$, $y > 0$ gelten folgende Aussagen:

(a) $P[M_t \le y] = P[|W_t| \le y] = P[M_t - W_t \le y]$;

(b) $P[\tau_y \le t] = 2 \cdot P[W_t > y]$,

τ_y hat die gleiche Verteilung wie y^2/W_1^2; insbesondere gelten: $P[\tau_y < \infty] = 1$, $E[\tau_y] = \infty$.

Gemäß 3.14b haben der Prozeß $M = (M_t)$ des laufenden Maximums und die reflektierte BB $|W|$ die gleichen 1–dim. Randverteilungen. Dies ist für die 2–dim. Randverteilungen nicht mehr richtig; denn es gilt z.B. für $s<t$: $P[M_t < M_s] = 0 < P[|W_t| < |W_s|]$. Dagegen kann gezeigt werden, daß die reflektierte BB $|W|$ und der Prozeß $M-W$ sogar als Zva mit Werten in $C[0,\infty)$ die gleiche Verteilung haben.
Die Aussagen von 3.15b gelten entsprechend auch für negative Niveaus y, da W gemäß Def. 2.7 durch $-W$ ersetzt werden kann. Die BB ist gemäß 3.15b also **nullrekurrent** im gleichen Sinne wie die 1–dim. symmetrische Irrfahrt.

3.16 Bemerkung. Mit Hilfe von 3.14/3.15 lassen sich auch die [gemeinsamen] Dichten berechnen.

Die **Beweisidee** soll zunächst für $\tau := \tau_y$ an 3.15 (b) erläutert werden. Es ist

$$P[\tau < t] = P[\tau < t, W_t > y] + P[\tau < t, W_t < y] = P[W_t > y] + P[\tau < t, W_t - W_\tau < 0]$$
$$\overset{?}{=} \ldots + P[\tau < t, -(W_t - W_\tau) < 0] = \ldots + P[\tau < t, W_t > y] = 2 \cdot P[W_t > y].$$

Der Schritt " $\overset{?}{=}$ " wird **Spiegelungsprinzip** genannt. Der Prozeß $(W_t - W_\tau , t \ge \tau)$ verhält sich unabhängig von der Vergangenheit $\mathfrak{F}^W_{\tau+}$ so wie der Prozeß (W_t) unter P, seine Verteilung ist also unabhängig gegenüber einer Spiegelung. Zu seiner Rechtfertigung muß die starke ME herangezogen werden.

Beweis von 3.14. Sei wieder $\tau := \tau_y$. (0) ist bekannt.

a) Wegen $P[y+W_s < x] = P[y-W_s < x] = P[2y-x < y+W_s]$ gilt:

(3.17) $P(s,y; (-\infty,x)) = P(s,y; (2y-x,\infty))$ (Spiegelungsinvarianz).

Somit ergibt sich mit 3.6, sowie $P[W_t = x] = 0$ und $2y-x \ge y$:

$P[M_t > y, W_t \le x] = P[M_t > y, W_t < x] = P[\tau < t, W_t < x] = {}_{\{\tau<t\}}\!\int P[W_t < x \,|\, \mathfrak{F}^W_{\tau+}]\, dP$

$= {}_{\{\tau<t\}}\!\int P(t-\tau, y; (-\infty, x))\, dP \overset{(3.17)}{=} {}_{\{\tau<t\}}\!\int P(t-\tau, y; (2y-x, \infty))\, dP$

$= P[\tau < t, W_t > 2y-x] = P[W_t > 2y-x]$

$= P[W_t < x-2y] = P[W_t \le x-2y]$.

Speziell ergibt sich das Spiegelungsprinzip " $\overset{?}{=}$ " mit $y = x = W_\tau$ auf $\{\tau < \infty\}$.

Damit ergibt sich: $P[M_t \le y, W_t \le x] = P[W_t \le x] - P[M_t > y, W_t \le x] = P[W_t \le x] - P[W_t \le x-2y]$.

[]

Beweis von 3.15. a) $P[M_t \le y] = P[W_t \le y, M_t \le y]$; jetzt kann 3.14 (a) benutzt werden.

Die Verteilung von $M_t - W_t$ ergibt sich aus der gemeinsamen Verteilung von M_t und W_t, also aus 3.14 (a) oder mit einer **Zeitumkehr**:

$M_t - W_t = \max_{0\le s\le t} (W_s - W_t) = \max_{0\le s\le t} \tilde{W}_s =: \tilde{M}_t$ mit $\tilde{W}_s := W_{t-s} - W_t$.

Dabei gilt:

(3.18) $(\tilde{W}_s, 0\le s\le t)$ ist eine standard. BB auf $[0,t]$

wegen $\tilde{W}_0 = 0$, $\tilde{W}_s - \tilde{W}_u = W_{t-s} - W_{t-u} = -(W_{t-u} - W_{t-s}) \sim N(0, s-u)$ $\forall\, u \le s$; die Unabhängigkeit der Zuwächse folgt direkt. Also ergibt sich: $P[M_t - W_t \le y] = P[\tilde{M}_t \le y] = P[M_t \le y]$.

b) Mit (a) und (3.13) folgt: $P[\tau < t] = P[M_t > y] = P[\,|W_t| > y] = 2 \cdot P[W_t > y]$, also

(3.19) $P[\tau_y < t] = 2 \cdot P[W_1 > y/\sqrt{t}\,] = P[W_1^2 > y^2/t] = P[y^2/W_1^2 < t]$;

dieser Ausdruck ist stetig in t, also $= P[\tau \le t]$ und konvergiert für $t \to \infty$ gegen: $2 \cdot P[W_1 > 0] = 1$.

Wegen (3.19) gilt:

$E[\tau] = y^2 \cdot E[W_1^{-2}] = y^2/\sqrt{2\pi} \cdot \int x^{-2} \exp\{-x^2/2\}\, dx \ge \text{const} \cdot {}_0\!\int^1 x^{-2}\, dx = \infty$. []

Kapitel 2: Martingale

§ 8 Zeitstetige Martingale.

Neben stochastischen Prozessen auf $[0,\infty)$ sollen auch solche auf $[0,T]$ betrachtet werden. Es sei stets ein fester W–Raum $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ zugrundegelegt mit einer Filterung $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t,\ t \in [0,T]\cap\mathbb{R})$ in $\mathfrak{F}$ für ein $T \in [0,\infty]$.

8.1 Definition. $X = (X_t,\ t \in [0,T]\cap\mathbb{R})$ sei ein stochastischer Prozeß mit Zustandsraum $\mathbb{R}$. Dabei ist T der **Zeithorizont**. Dann heißt $(X,\mathbb{F})$ **Martingal** [bzw. **Submartingal** bzw. **Supermartingal**], falls gilt:

i) X ist $\mathbb{F}$–adaptiert;

ii) $E[|X_t|] < \infty \quad \forall\, t\geq 0$;

iii) $E[X_t|\mathfrak{F}_s] = X_s$ f.s. $\forall\, s\leq t$ [bzw. "$\geq$" bzw. "$\leq$"].

Die Eigenschaft (iii) bedeutet: X_s ist eine Version von $E[X_t|\mathfrak{F}_s]$. Offenbar ist (iii) in der Situation 8.1a,b äquivalent zu

iii)' $\quad \int_A (X_t - X_s)\, dP = 0 \quad \forall\, A \in \mathfrak{F}_s,\ s\leq t$ [bzw. "$\geq$" bzw. "$\leq$"].

8.2 Beispiel: **Brownsche Bewegung.** Sei W eine 1–dim. standard. BB.

(a) $(W,\mathbb{F}^W)$ ist ein Mart, es gilt:

$$E[W_t - W_s|\mathfrak{F}^W_s] = E[W_t - W_s] = 0 \quad \text{für } s\leq t;$$

denn der Zuwachs $W_t - W_s$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}^W_s$ (vgl. 2.9).

(b) $((W_t^2-t),\mathbb{F})$ ist ein Mart und $((W_t^2),\mathbb{F})$ ist ein Submart. Dies folgt aus:

$$\begin{aligned} E[W_t^2 - W_s^2|\mathfrak{F}_s] &= E[(W_t - W_s)^2 + 2W_s\cdot W_t - 2W_s^2|\mathfrak{F}_s] \\ &= E[(W_t - W_s)^2] + 2W_s\cdot[W_t|\mathfrak{F}_s] - 2W_s^2 = t-s \geq 0 \ . \ \square \end{aligned}$$

8.3 Beispiel: Poissonprozeß. Sei N ein Poisson–Prozeß mit Intensität $\lambda \in (0,\infty)$, $\mathbb{F}$ die kanonische Filterung und $M_t := N_t - \lambda\cdot t$. Dann heißt M **kompensierter Poisson–Prozeß**.

N und M haben unabhängige und stationäre Zuwächse; deshalb folgt wie in Beispiel 8.2:
$(M,\mathbb{F})$ und $((M_t^2 - \lambda t), \mathbb{F})$ sind Martingale, und $(M^2,\mathbb{F})$ und $(N,\mathbb{F})$ sind Submartingale. $\square$

8.4 Lemma. Sei $(X,\mathbb{F})$ Mart [bzw. Submart], $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ konvex [bzw. konvex und isoton], sodaß $\varphi(X_t)$ für $t\geq 0$ intb. ist. Dann ist $(\varphi(X),\mathbb{F})$ Submart mit $\varphi(X) := (\varphi(X_t),\ t\geq 0)$.

Der **Beweis** verläuft wie im zeitdiskreten Fall. Ein Beispiel ist $\varphi(x) = x^2$.

Viele Aussagen für zeitstetige [Sub–] Martingale können auf entsprechende Aussagen für zeitdiskrete Prozesse zurückgeführt werden Dabei ist es bequem, auch zeitdiskrete [Sub–] Martingale mit einer abzählbaren Indexmenge $I = \{t_0 < t_1 < ...\} \subset [0,\infty)$ zuzulassen. Der Begriff einer Stoppzeit τ mit Werten in I oder $I \cup \{\infty\}$ und die Resultate über [Sub–] Martingale mit Indexmenge $I \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ übertragen sich in natürlicher Weise. (Setze etwa $M_n := X_{t_n}$.)

8.5 Stoppsatz. Ist $(X,\mathbb{F})$ rechtsstetiges Submart und sind σ,τ beschränkte $\mathbb{F}_+$–Stoppzeiten mit $\sigma \le \tau$, so sind X_σ und X_τ intb und es gilt:

$$E[X_\tau | \mathfrak{F}_{\sigma+}] \ge X_\sigma \text{ f.s. .}$$

Nach 1.18 ist X_σ $\mathfrak{F}_{\sigma+}$–mb mit $\mathfrak{F}_{\sigma+} \subset \mathfrak{F}_\infty \subset \mathfrak{F}$.

Ist σ sogar $\mathbb{F}$–Stoppzeit, so folgt in der Situation von 8.5 erst recht:

(8.6) $$E[X_\tau | \mathfrak{F}_\sigma] \ge X_\sigma \text{ f.s. ;}$$

denn X_σ ist dann $\mathfrak{F}_\sigma$–mb nach 1.18/1.20.

8.7 Folgerung Für Martingale X erhält man im Stoppsatz "=" anstelle von "≥", da dann sowohl X als auch –X Submart ist.

8.8 Folgerung. Ist $(X,\mathbb{F})$ rechtsstetiges Submart [bzw. Mart], so ist auch $(X,\mathbb{F}_+)$ Submart [bzw. Mart].

Beweis von 8.5. Sei etwa $\tau < N \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist neben der Integrierbarkeit:

8.9 Beh. $\int_A X_\sigma \, dP \le \int_A X_\tau \, dP$ für $A \in \mathfrak{F}_{\sigma+}$.

Sei $\sigma_n := k/2^n$ auf $\{(k-1)/2^n \le \sigma < k/2^n\}$ für $k = 1,...,N \cdot 2^n$ und τ_n entsprechend definiert. Dann gilt: $\sigma < \sigma_n \le \tau_n \le \tau_{n-1}$, $\sigma_n \downarrow \sigma$, $\tau_n \downarrow \tau$. Wegen $\{\sigma_n \le k/2^n\} = \{\sigma < k/2^n\} \in \mathfrak{F}_{k/2^n}$ sind σ_n und entsprechend τ_n gemäß 1.11 $\mathbb{F}$–Stoppzeiten mit [vgl. 1.16e und 1.21]

$$\mathfrak{F}_{\sigma+} \subset \mathfrak{F}_{\sigma_n} \subset \mathfrak{F}_{\tau_n} \subset \mathfrak{F}_{\tau_{n-1}} .$$

Nun kann als Vorstufe Folgendes gezeigt werden:

(*) Beh. $\int_A X_{\sigma_n} \, dP \le \int_A X_{\tau_m} \, dP$ für $A \in \mathfrak{F}_{\sigma_n} \supset \mathfrak{F}_{\sigma+}$, $m \le n$

Die Zufallsabhängigkeit von σ_n beherrscht man durch Einführung von

(**) $A_k^n := A \cap \{\sigma_n = k/2^n\}$ $[= A \cap \{\sigma_n \le k/2^n\} \setminus A \cap \{\sigma_n \le (k-1)/2^n\}] \in \mathfrak{F}_{k/2^n}$

und diejenige von τ_m durch den zeitdiskreten Stoppsatz. Sei $I_n := \{k/2^n;\ k = 0,1,...,N \cdot 2^n\}$.

Dann ist $(X_t, \mathfrak{F}_t,\ t \in I_n)$ ein zeitdiskretes Submart und τ_m Stoppzeit dazu; denn man hat wie in (**) :

$\{\tau_m = t\} \in \mathfrak{F}_t$ für $t \in I_m$ und $\{\tau_m = t\} = \emptyset$ für $t \in I_n \setminus I_m$.

Somit ist nach dem zeitdiskreten Stoppsatz [Sto. Pro. Kor. 4.6] $(X_{t\wedge\tau_m}, \mathfrak{F}_t,\ t \in I_n)$ Submart, insbesondere $X_{\tau_m} = X_{N\wedge\tau_m}$ intb, ebenso X_{σ_n}. Es folgt mit $\sigma_n \le \tau_m$ und (**):

$$\int_{A_k^n} X_{\sigma_n}\, dP = \int_{A_k^n} X_{(k/2^n)\wedge\tau_m}\, dP \le \int_{A_k^n} X_{N\wedge\tau_m}\, dP = \int_{A_k^n} X_{\tau_m}\, dP .$$

Durch Summation über k erhält man (*).

Unser Ziel ist jetzt zum Limes m=n $\to \infty$ überzugehen. Setzt man in (*) $\sigma = \tau$, so ergibt sich:

$$\int_A X_{\tau_n}\, dP \le \int_A X_{\tau_m}\, dP \quad \text{für } A \in \mathfrak{F}_{\tau_n},\ m \le n.$$

Definiert $\tilde{X}_{-n} := X_{\tau_n}$ und $\tilde{\mathfrak{F}}_{-n} := \mathfrak{F}_{\tau_n}$, so ist $(\tilde{X}_{-m}, \tilde{\mathfrak{F}}_{-m}, -m=...-2,-1,0)$ also ein Submart mit letztem Element. Somit ist $(X_{\tau_n} \vee a)$ für $a \in \mathbb{R}$ glm intb [Sto.Pro. Lemma 4.4]. Entsprechendes gilt für σ anstelle von τ. Das gestattet den Grenzübergang m=n $\to \infty$ in (*) für $A \in \mathfrak{F}_{\sigma+}$ [Sto. Pro. Kor. 4.3], wenn man X_t durch $X_t \vee a$ ersetzt, was nach 8.4 erlaubt ist. Also ergibt sich wegen der Rechtsstetigkeit der Pfade:

$$\int_A X_\sigma \vee a\, dP \le \int_A X_\tau \vee a\, dP,\ A \in \mathfrak{F}_{\sigma+}, \text{ insbesondere: } E[X_0 \vee a] \le E[X_\tau \vee a] \le E[X_N \vee a]$$

wegen $\tau < N$. Wegen monot. Konv. folgt schließlich für $a \downarrow -\infty$ das gewünschte Resultat.

Der letzte Teil ist dem Beweis des zeitdiskreten Martingal–Konvergenzsatzes nachgebildet. []

8.10 Stoppsatz. Sei $(X,\mathbb{F})$ rechtsstetiges Submart [bzw. Mart] und $X^\tau = (X_{t\wedge\tau}, t \ge 0)$ der gestoppte Prozeß. Ist τ $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit, so ist auch $(X^\tau, \mathbb{F}_+)$ Submart [bzw. Mart].

Beweis. Die Adaptiertheit an $\mathbb{F}_+$ folgt aus 1.18. Sei $s<t$, $A \in \mathfrak{F}_{s+}$. Es gilt $\{\tau > s\} \in \mathfrak{F}_{s+}$.

Mit dem Stoppsatz 8.5 folgt für die Stoppzeiten s und $\tau' := t \wedge (\tau \vee s) \ge s$:

$$\int_{A\cap\{\tau>s\}} X_{s\wedge\tau}\, dP = \int_{A\cap\{\tau>s\}} X_s\, dP \le \int_{A\cap\{\tau>s\}} X_{\tau'}\, dP = \int_{A\cap\{\tau>s\}} X_{t\wedge\tau}\, dP .$$

Auf $\{\tau \le s\}$ gilt: $X_{s\wedge\tau} = X_{t\wedge\tau}$, also folgt auch $\int_A X_{s\wedge\tau}\, dP = \int_A X_{t\wedge\tau}\, dP$. []

Im Fall, daß X nicht nur Submart, sondern sogar isotone Pfade hat, ist folgender Satz gerade die Markoffsche Ungleichung.

8.11 Maximal–Ungleichung von Doob. Sei $(X,\mathbb{F})$ ein rechtsstetiges nichtnegatives Submart, z.B. $X_s = |M_s|^p$ für ein Mart M und $p \ge 1$. Dann gilt für $t \ge 0$:

(a) $P[\sup_{0\le s\le t} X_s \ge \alpha] \le \alpha^{-p} \cdot E[X_t^p] \quad \forall\, \alpha > 0;$

(b) $E[\sup_{0\le s\le t} X_s^2] \le 4 \cdot E[X_t^2].$

Beweis: Sei o.E. $E[X_t^p] < \infty$. a) Wähle $I_n := \{kt/2^n;\ k=0,...,2^n\}$. Dann ist $(X_s;\ s \in I_n)$ zeitdiskretes Submart. Aus der zeitdiskreten Maximal–Ungleichung von Doob und dem Beweis dazu [Sto.Pro. Prop. 4.14] folgt für $V_n := \max_{I_n} X$: $\quad P[V_n > z] \le z^{-p} \cdot \int_{\{V_n > z\}} X_t^p \, dP \le z^{-p} \cdot \int X_t^p \, dP$.

Es gilt: $V_n \uparrow \sup_{[0,t]} X =: V$ wegen der Rechtsstetigkeit der Pfade und somit $\{V_n > z\} \uparrow \{V > z\}$. Damit ergibt sich:

(*) $\quad P[V > z] = \lim_n P[V_n > z] \le z^{-p} \cdot \int_{\{V>z\}} X_t^p \, dP \le z^{-p} \cdot E[X_t^p]$.

Mit $z \uparrow \alpha$ erhält man die Beh.

b) Es gilt:

(**) $\quad E[V^2] = 2 \cdot \int_0^\infty z \cdot P[V > z] \, dz$.

1. Bew. von (**): $E[V^2] = \int_0^\infty P[V^2 > y] \, dy$; setze $y = z^2$.

2. Bew. von (**): $E[V^2] = 2 \cdot E[\int_0^V (V-u) \, du] = 2 \cdot E[\int_0^V du \int_u^V 1 \, dz]$; benutze jetzt Fubini.

Mit (*) für p=1 und (**) folgt:

$$E[V^2] \le 2 \cdot \int_0^\infty \int_{\{V>z\}} X_t \, dP \, dz = 2 \cdot \int X_t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{V>z\}} \, dz \, dP = 2 \cdot E[X_t \int_0^V 1 \, dz] =$$
$$= 2 \cdot E[X_t \cdot V] \le 2 \cdot \{E[X_t^2] \cdot E[V^2]\}^{\frac{1}{2}}. \square$$

Ein Martingal soll einen Prozeß beschreiben, bei dem weder ein Trend nach oben noch ein Trend nach unten besteht. Die obige Definition ist an die Endlichkeit des Erwartungswertes gebunden. Davon kann man sich durch ein "Stutzung" befreien. Offenbar ist aber die Stutzung $\varphi_n(X) := X^+ \wedge n - X^- \wedge n$ nicht geeignet, da sie eine eventuell bereits vorliegende Martingaleigenschaft zerstören kann, denn φ_n ist nicht konvex. Dagegen kann das Stoppen eines Prozesses in Hinblick auf den Stoppsatz 8.10 eine geeigneten Stutzung bieten.

8.12 Lemma. Sei X ein reeller an $\mathbb{F}$ adaptierter Prozeß mit f.s. stetigen Pfaden sowie $X_0 = 0$ f.s. Dann sind $\tau_n := \inf\{t \ge 0;\ |X_t| > n\}$ (mit $\inf \emptyset := \infty$), $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}_+$–Stoppzeiten mit $\tau_n \uparrow \infty$ f.s. Der gestoppte Prozeß $X^{(n)} := (X_{t \wedge \tau_n}, t \ge 0)$ ist ein an $\mathbb{F}_+$ adaptierter Prozeß mit f.s. stetigen Pfaden und:

$$|X_t^{(n)}| \le n \quad \forall\, t \ge 0 \quad \text{f.s.}$$

Beweis. Gemäß 1.14 (sowie 1.23–1.25) ist τ_n $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit und gemäß 1.18 ist $X^{(n)}$ an $\mathbb{F}_+$ adaptiert. Sei $\Omega_0 \in \mathfrak{F}$ mit $P[\Omega_0] = 1$ so gewählt, daß $X_0(\omega) = 0$ und $X_.(\omega)$ stetig $\forall\, \omega \in \Omega_0$. Auf Ω_0 gilt: $|X_t^{(n)}| \le n$ und $\tau_n \uparrow \infty$, da $X_.(\omega)$ auf jedem kompakten Intervall beschränkt ist. $\square$

Mit dem Trick aus 8.12, der **Lokalisierung** genannt wird, kann also etwa bei Prozessen mit stetigen Pfaden die Integrierbarkeit erzwungen werden.
Ein Prozeß X heißt natürlich glm. intb., wenn es die Familie der Zva $(X_t,\ t\geq 0)$ ist.

8.13 Definition.(a) Eine isotone Folge (τ_n) von $\mathbb{F}_+$–Stoppzeiten heißt **Lokalisierungsfolge**, falls :

$\tau_n \uparrow \infty$ f.s. im Falle $T=\infty$ bzw. $P\lceil\cup_n \{\tau_n \geq T\}\rceil = 1$ im Falle $T<\infty$.

(b) Ist X ein $\mathbb{F}$–adaptierter rechtsstetiger Prozeß und existiert eine Lokalisierungsfolge (τ_n), sodaß der gestoppte Prozeß $(X^{(n)},\mathbb{F})$ mit $X_t^{(n)} := X_{t\wedge\tau_n}$, $n\in\mathbb{N}$, ein glm. intb. Mart ist, so heißt $(X,\mathbb{F})$ ein **lokales Martingal** mit Lokalisierungsfolge (τ_n).

Sowohl für $T=\infty$ als auch für $T<\infty$ hat man die wichtige Eigenschaft:

(8.14) $\quad X_{t\wedge\tau_n} \to X_t$ f.s. für $n\to\infty$, $t\in\lceil 0,T\rceil\cap\mathbb{R}$ für jede Lokalisierungsfolge (τ_n).

Aus dem Stoppsatz 8.10 folgt, daß man die Lokalisierungsfolgen verkleinern kann:

8.15 Lemma. Sei $(X,\mathbb{F})$ lokales Mart mit Lokalisierungsfolge (τ_n).

(i) Ist σ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit, so ist $X^\sigma = (X_{t\wedge\sigma},\ t\in\lceil 0,T\rceil\cap\mathbb{R})$ wieder ein lokales Mart. mit Lokalisierungsfolge (τ_n).

(ii) Ist (σ_n) eine beliebige Lokalisierungsfolge, so sind $(\tau_n\wedge\sigma_n)$ und insbesondere $(\tau_n\wedge n)$ wieder Lokalisierungsfolgen für X.

Beweis: Nach dem Stoppsatz 8.10 ist $(X_{t\wedge\sigma}^{(n)},\ t\geq 0) = (X_{t\wedge\tau_n\wedge\sigma},\ t\geq 0)$ ein Martingal. Sei $\psi_\alpha(x) := (|x|-\alpha)^+$. Dann ist ψ_α konvex und somit $\psi(X^{(n)})$ nach 8.4 ein Submart. Es folgt nach dem Stoppsatz 8.5: $\sup_t E\lceil\psi_\alpha(X_{t\wedge\sigma}^{(n)})\rceil \leq \sup_t E\lceil\psi_\alpha(X_t^{(n)})\rceil \to 0\ (\alpha\to\infty)$.
Aus der glm. Integrierbarkeit von $X^{(n)}$ folgt also die von $(X_{t\wedge\sigma}^{(n)},\ t\geq 0)$. Dies gilt auch für σ_n anstelle von σ. Sicher ist $(\tau_n\wedge\sigma_n)$ Lokalisierungsfolge. $\square$

Jedes Martingal ist ein lokales Martingal; man kann $\tau_n=n$ als Lokalisierungsfolge wählen. Die glm. Integrierbarkeit von $(X_t,\ t\leq n)$ folgt etwa aus $E\lceil\psi_\alpha(X_t)\rceil \leq E\lceil\psi_\alpha(X_n)\rceil \to 0$ für $\alpha\uparrow\infty$, wobei ψ_α wie im Beweis von 8.15 gewählt wird.

8.16 Lemma. (a) Ein nichtnegatives lokales Mart X ist ein Supermart.

(b) Ein Supermart $\lceil$Submart$\rceil$ X mit $E\lceil X_0\rceil = E\lceil X_t\rceil\ \forall\, t\geq 0$ ist ein Mart.

Beweis. Sei s<t.

a) Ist (τ_n) eine Lokalisierungsfolge für X, so folgt zunächst die Integrierbarkeit mit Fatou und (8.14):

$$0 \le E[X_t] \le \underline{\lim}\, E[X_{t\wedge\tau_n}] = \underline{\lim}\, E[X_{0\wedge\tau_n}] = E[X_0].$$

Aus dem Lemma von Fatou für bedingte Erwartungwerte ergibt sich :

$$X_s = \lim X_{s\wedge\tau_n} = \lim E[X_{t\wedge\tau_n} | \mathfrak{F}_s] \ge E[\lim X_{t\wedge\tau_n} | \mathfrak{F}_s] = E[X_t | \mathfrak{F}_s].$$

b) Einerseits gilt: $Y := E[X_t - X_s | \mathfrak{F}_s] \le 0$, anderseits $E[Y] = 0$; also folgt $Y = 0$ f.s. . []

Das obige Lemma liefert u.a. eine hinreichende Bedingung dafür, daß ein lokales Mart ein Mart ist. Weitere Bedingungen bietet

8.17 Proposition. Ist X ein lokales Mart mit Lokalisierungsfolge (τ_n), so ist X sogar ein Mart unter jeder der folgenden Bedingungen:

(i) $\{X_{t\wedge\tau_n}, n\in\mathbb{N}\}$ ist glm. intb. $\forall\, t \ge 0$;

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X^2_{t\wedge\tau_n}] < \infty \ \forall\, t\ge 0$.

Beweis: Unter (i) folgt für $A \in \mathfrak{F}_s$ und u = s,t aus der glm. Integrierbarkeit :

$$\int_A X_u\, dP = \int_A \lim_n X_{u\wedge\tau_n}\, dP = \lim_n \int_A X_{u\wedge\tau_n}\, dP .$$

Der Fall (ii) ist ein Spezialfall von (i) [Sto. Pro. Bem. 4.2.(4)]. []

Die folgende Aussage ist eine einfache Folgerung.

8.18 Bemerkung. Sei X ein reller Prozeß mit f.s. stetigen Pfaden sowie $X_0 = 0$ f.s. Dann ist X genau dann ein lokales Mart, wenn $(X_{t\wedge\tau_n}, t\ge 0)$ ein Mart ist, wobei die Folge (τ_n) wie in 8.12 gewählt ist.

Dies ist eine Übungsaufgabe.

8.19 Bemerkung. Ist M ein Mart, so gilt:

$$E[M_t | \mathfrak{F}_{s-}] = M_{s-} \text{ f.s. } \forall\, 0<s\le t \quad \text{mit } M_{s-} = \lim_n M_{s-1/n} .$$

Beweis: Es gilt $M_{s-1/n} = E[M_t | \mathfrak{F}_{s-1/n}]$.

Nun ist $(\mathfrak{F}_{s-1/n}, n\in\mathbb{N})$ eine zeitdiskrete Filterung, sodaß offenbar gilt:

$$\mathfrak{F}_{s-} = \sigma(\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_{s-1/n}) .$$

Aus dem Lévyschen Martingalsatz [Sto.Pro. Kor. 4.11] folgt:

$$\lim_n E[M_t | \mathfrak{F}_{s-1/n}] = E[M_t | \mathfrak{F}_{s-}] \quad \text{f.s. . []}$$

§ 9 Stetige quadrat–integrierbare Martingale.
Es sei wieder ein W–Raum $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ zugrundegelegt mit einer Filterung $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t,\ t\in[0,T]\cap\mathbb{R})$ in $\mathfrak{F}$ mit $T\leq\infty$. In Hinblick auf 8.5/8.8 kann und soll o.E. $\mathbb{F} = \mathbb{F}_+$ angenommen werden. Martingale und Stoppzeiten sind immer solche bezüglich $\mathbb{F}_+$.

9.1 Definition. Ein Mart X heißt **quadrat–intb.**, falls gilt: $E[X_t^2] < \infty \quad \forall\ t\geq 0$. Hat ein Mart X rechtsstetige [bzw. f.s. stetige] Pfade und gilt: $X_0 = 0$ f.s. und $E[|X_t|^p] < \infty\ \forall\ t\geq 0$ für ein $p\geq 1$, so schreiben wir $X \in \mathcal{M}^p$ [bzw. $X \in \mathcal{M}_c^p$]. Ferner sei $\mathcal{M}^{loc}$ [bzw. $\mathcal{M}_c^{loc}$] die Menge der rechtsstetigen lokalen Martingale [bzw. mit f.s. stetigen Pfaden].

Man sieht leicht, daß $\mathcal{M}^p$ ein Vektorraum ist (wegen $|x+y|^p \leq 2^p\cdot(|x|^p+|y|^p)$) . Der Start in 0 ist keine Einschränkung, denn offenbar ist X genau ein Mart, wenn $X-X_0$ ein Mart und X_0 intb. ist. Bei p=1 ist die Integrierbarkeitsbedingung für Martingale natürlich immer erfüllt.

9.2 Lemma. Sei X ein quadrat–intb. Mart, dann gilt:
(a) $X^2 = (X_t^2,\ t\geq 0)$ ist ein Submart;
(b) $E[(X_v - X_u)\cdot(X_t - X_s)|\mathfrak{F}_r] = 0$ f.s. $\forall\ 0\leq s\leq t\leq u\leq v,\ r\leq u$;
(c) $E[(X_u - X_t)^2 + (X_t - X_s)^2|\mathfrak{F}_r] = E[(X_u - X_s)^2|\mathfrak{F}_r]$ f.s. $\forall\ 0\leq s\leq t\leq u,\ r\leq t$.

Ein quadrat–intb. Mart hat also bedingt unkorrelierte Zuwächse; und somit ist die bedingte Varianz der Summe gleich der Summe der bedingten Varianzen.
Der **Beweis** von (a) folgt aus 8.4; derjenige von (b) und (c) ist eine Übung. []

9.3 Definition. Ein rechtsstetiger, an $\mathbb{F}$ adaptierter Prozeß A heißt **wachsend**, falls fast alle Pfade isoton sind mit $A_0 = 0$ und falls $E[A_t] < \infty\ \forall\ t\geq 0$ gilt.

In 9.3 gilt: $\sup_{t\leq n} A_t \leq A_n < \infty$ f.s.; somit sind fast alle Pfade von A reellwertig.

9.4 Definition. Existiert zu $X \in \mathcal{M}^2$ ein wachsender Prozeß A mit f.s. stetigen Pfaden, so daß $X^2 - A$ ein Mart ist, so heißt $A =: \langle X\rangle$ **Varianzenprozeß** zu X.

Man sagt auch: $\langle X\rangle$ ist ein Kompensator zu X^2. Die Existenz eines Varianzenprozesses folgt aus der sog. **Doob–Meyer–Zerlegung.** Diese wird hier nicht benötigt. Vielmehr kann der Varianzenprozeß in den hier behandelten Fällen direkt angegeben werden. Das beruht auf dem folgenden Lemma.

9.5 Lemma. Ist W eine 1–dimensionale standardisierte Brownsche Bewegung (BB), so ist $\langle W\rangle_t = t$ Varianzenprozeß zu W.

Der **Beweis** folgt aus dem Beispiel 8.2. Der gleiche Varianzenprozeß ergibt sich für den kompensierten Poissonprozeß mit Intensität $\lambda = 1$.
Mit Hilfe oben eingeführter Begriffe läßt sich ein weiteres Kriterium dafür angeben, wann ein lokales Mart auch ein Mart ist:

9.6 Proposition. Sei $X \in \mathcal{M}_c^{loc}$ und A ein wachsender Prozeß mit f.s. stetigen Pfaden, sodaß $X^2 - A \in \mathcal{M}_c^{loc}$ gilt. Dann ist $X \in \mathcal{M}_c^2$ mit Varianzenprozeß A.

Beweis. (i) Seien (τ'_n) und (τ''_n) Lokalisierungsfolgen zu X bzw. $X^2 - A$. Dann ist $(\tau_n) := (\tau'_n \wedge \tau''_n)$ gemäß 8.15 Lokalisierungsfolge zu X und $X^2 - A$.
(ii) Beh.: $E[X^2_{t\wedge\tau_n}] \le E[A_t]$.
Aus $E[X^2_{t\wedge\tau_n} - A_{t\wedge\tau_n}] = E[X^2_0 - A_0] = 0$ folgt nämlich: $E[X^2_{t\wedge\tau_n}] = E[A_{t\wedge\tau_n}] \le E[A_t]$.
(iii) Beh.: $E[X^2_t] \le E[A_t]$.
Dies ergibt sich mit Fatou aus: $E[X^2_t] = E[\lim_n X^2_{t\wedge\tau_n}] \le \lim_n E[X^2_{t\wedge\tau_n}] \le E[A_t]$,
(iv) Beh. $X \in \mathcal{M}_c^2$.
Aus (ii) und 8.17 (ii) folgt, daß X ein Mart ist und somit wegen (iii) in $\mathcal{M}_c^2$ liegt.
(v) Beh.: Mit $\tau_\infty := T$ ist $\tilde{X}^2 := (X^2_{t\wedge\tau_n}, \mathcal{F}_{t\wedge\tau_n}, n \in \bar{\mathbb{N}})$ ein nicht–negatives zeitdiskretes Submart.
Gemäß (iv) und 9.2a ist X^2 Submart mit rechtsstetigen Pfaden. Ferner sind $t\wedge\tau_n$ beschränkte Stoppzeiten mit $t\wedge\tau_m \le t\wedge\tau_n$ für $m \le n \le \infty$. Jetzt kann der Stoppsatz 8.5 angewendet werden.
(vi) Beh.: $(X^2_{t\wedge\tau_n} - A_{t\wedge\tau_n}, n \in \bar{\mathbb{N}})$ ist gleichmäßig integrierbar.
In Hinblick auf (v) ist $\tilde{X}^2$ ein nicht–negatives Submart mit letztem Element. Damit ist $\tilde{X}^2$ gleichmäßig integrierbar (Sto.Pro. Lemma 4.4). Ferner ist $(A_{t\wedge\tau_n}, n \in \bar{\mathbb{N}})$ gleichmäßig integrierbar wegen $0 \le A_{t\wedge\tau_n} \le A_t$ und der Integrierbarkeit von A_t.
(vii) Beh. $(X^2 - A)$ ist Mart.
Dies ergibt sich nun mit (vi) aus 8.17(i). $\square$

Das folgende Lemma rechtfertig den Namen Varianzenprozeß.

9.7 Lemma. Sei $X \in \mathscr{M}^2$ mit Varianzenprozeß $<X>$.

(a) Sind $\rho \le \sigma \le \tau$ beschränkte Stoppzeiten, so gilt:

$$E[(X_\tau - X_\sigma)^2 | \mathfrak{F}_\rho] = E[X_\tau^2 - X_\sigma^2 | \mathfrak{F}_\rho] = E[<X>_\tau - <X>_\sigma | \mathfrak{F}_\rho] \text{ f.s. .}$$

(b) Ist τ Stoppzeit, dann ist $(X_{t\wedge\tau}, t\ge 0) \in \mathscr{M}^2$ mit dem Varianzenprozeß $(<X>_{t\wedge\tau}, t\ge 0)$ und es gilt: $\mathrm{Var}[X_{t\wedge\tau}] = E[X^2_{t\wedge\tau}] = E[<X>_{t\wedge\tau}]$.

Der **Beweis** ist eine Übungsaufgabe.

9.8 Definition. Sei $\Pi = \{0<t_1<...<t_m=t\}$ eine **Zerlegung** von $[0,t]$. dann sei zu $s=t_k \in \Pi$ der Vorgänger definiert als $s\_ := t_{k-1}$ mit $t_0 = 0$ und die **maximale Schrittweite** als $\|\Pi\| := \max_{s\in\Pi} |s - s\_|$.

Zu $p > 0$ wird die **p–te** [bzw. **totale** für p=1 bzw. **quadratische** für p=2] **Variation** von X über Π definiert als

$$V_t^{(p)}(\Pi,X) := V_t^{(p)}(\Pi) := \Sigma_{s\in\Pi} |X_s - X_{s-}|^p.$$

Zu einer reellen Funktion $f(\Pi)$ schreibt man $\lim_{\|\Pi\|\to 0} f(\Pi) = 0$, falls $f(\Pi_n) \to 0$ gilt $\forall\ (\Pi_n)$ mit $\|\Pi_n\| \to 0$. Ist $V_t^{(p)}$ eine Zva mit Werten in $[0,\infty)$, so gelte:

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(p)}(\Pi) = V_t^{(p)} \ \textbf{n.W.} \ :\Leftrightarrow \ \lim_{\|\Pi\|\to 0} P[\|V_t^{(p)}(\Pi) - V_t^{(p)}\| > \varepsilon] \to 0 \quad \forall\ \varepsilon > 0.$$

Dann heißt $V_t^{(p)}$ **p–te Variation** von X auf $[0,t]$. Der **Stetigkeitsmodul** zu $\delta > 0$ sei definiert als:

$$m_t(X,\delta) := \sup\{|X_r - X_s|; 0 \le r < s \le t,\ s-r \le \delta\}.$$

Hat X rechtsstetige Pfade, so ist der Stetigkeitsmodul eine Zva. Es gilt offenbar:

(9.9a) $\quad V_t^{(q)}(\Pi) \le V_t^{(p)}(\Pi) \cdot m_t(X,\|\Pi\|)^{q-p},\ \ 0 < p < q.$

(9.9b) $\quad m_t(X,\delta)(\omega) \to 0$ für $\delta \to 0$, falls der Pfad $X_{\cdot}(\omega)$ stetig ist.

Heuristik: Existiert $\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(p)}(\Pi) := V_t^{(p)}$ in einem bestimmten Sinne, so kann man mit (9.9) oft schließen: $V_t^{(q)} = \infty$ für $q < p$ (z.B. p=2, q=1) bei $V_t^{(p)} > 0$ und $V_t^{(p)} = 0$ für $q > p$ bei $V_t^{(p)} < \infty$.

Das nächste Ziel ist die Bestimmung von $V_t^{(p)}$ aus Definition 9.8 für ein geeignetes p.

9.10 Satz. Sei $X \in \mathscr{M}_c^2$ mit Varianzenprozeß $<X>$. Dann gilt für Zerlegungen Π von $[0,t]$:

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(2)}(\Pi,X) = <X>_t \ \text{ n.W.} \ \ \forall\ t > 0.$$

In einem ersten Schritt soll unter Beschränktheitsvoraussetzungen sogar $\mathscr{L}^2$–Konvergenz gezeigt werden. Für den Beweis der Itô–Formel [s.u.] wird die Aussage etwas allgemeiner formuliert.

9.11 Proposition. (Der beschränkte Fall). Sei $X \in \mathcal{M}_c^2$ mit Varianzenprozeß $\langle X\rangle$ und sei Y ein adaptierter Prozeß mit f.s. stetigen Pfaden, so daß für $t \geq 0$ gilt:

$\exists\, K<\infty$ mit $|X_s| \leq K$, $\langle X\rangle_s \leq K$, $|Y_s| \leq K$, $0 \leq s \leq t$ f.s. Dann gilt für Zerlegungen Π von $[0,t]$:

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} E\left[\left\{\Sigma_{s\in\Pi}\, Y_{s-}\cdot(X_s - X_{s\_})^2 - {}_0\!\int^t Y_s \, d\langle X\rangle_s\right\}^2\right] = 0,$$

insbesondere $\qquad \lim_{\|\Pi\|\to 0} E\left[\left\{V_t^{(2)}(\Pi,X) - \langle X\rangle_t\right\}^2\right] = 0.$

9.12 Erläuterung zu 9.11. Für $\langle X\rangle_t(\omega) < \infty$ ist $s \mapsto \langle X\rangle_s(\omega)$ maßdefinierende Funktion zu einem Maß μ_ω auf $(0,t]$. Also ist ${}_0\!\int^t Y_s(\omega)\, d\,\langle X\rangle_s(\omega) := \mathbf{1}_{\{\langle X\rangle_t < \infty\}}(\omega)\cdot {}_{(0,t]}\!\int Y_s(\omega)\, \mu_\omega[ds] =: I_t(\omega)$ wohldefiniert und (I_t) ein adaptierter Prozeß mit rechtsstetigen Pfaden [vgl. Übung]. $\square$

Beweis von 9.11: Wähle $\Omega_0 \in \mathfrak{F}$ mit $P[\Omega_0] = 1$, so daß auf Ω_0 folgendes gilt: X, $\langle X\rangle$ und Y haben stetige reelle Pfade, $|X| \leq K$, $\langle X\rangle \leq K$, $|Y| \leq K$, $X_0 = 0$. Auf Ω_0 gilt dann für $\|\Pi\| \to 0$:

$\Sigma_{s\in\Pi}\, Y_{s-}\cdot \mathbf{1}_{(s\_,s]}(u) \to Y_u \quad \forall\, 0 < u \leq t$ und somit wegen maj. Konvergenz (bzgl. μ_ω):

$$J'(\Pi) := \Sigma_{s\in\Pi}\, Y_{s\_}\cdot(\langle X\rangle_s - \langle X\rangle_{s\_}) \to {}_0\!\int^t Y_u \, d\langle X\rangle_u =: J''.$$

Dabei hat man $|J'(\Pi)| \leq K^2$, $|J''| \leq K^2$ auf Ω_0. Somit folgt wegen maj. Konvergenz (bzgl. P): $E[\{J'(\Pi) - J''\}^2] \to 0$. Setzt man noch $J(\Pi) := \Sigma_{s\in\Pi}\, Y_{s\_}\cdot(X_s - X_{s\_})^2$, so bleibt z.z.:

$E[\{J(\Pi) - J'(\Pi)\}^2] \to 0$. Es gilt nun:

$$E[\{J(\Pi) - J'(\Pi)\}^2] = \Sigma_{s\in\Pi}\, E[\, Y_{s\_}^2 \cdot \{(X_s - X_{s\_})^2 - (\langle X\rangle_s - \langle X\rangle_{s\_})\}^2] .$$

Der Beweis verläuft analog zu 9.2c mit Hilfe von 9.7a [vgl. Übung].
Wegen $(\alpha^2-\beta)^2 \leq 2\cdot(\alpha^4 + \beta^2)$ ergibt sich:

$$E[\{J(\Pi) - J'(\Pi)\}^2] \leq 2K^2\cdot\{E[V_t^{(4)}(\Pi,X)] + E[V_t^{(2)}(\Pi,\langle X\rangle)]\}.$$

Die Behauptung folgt jetzt aus den nachfolgenden Lemma 9.14. $\square$

Beweis von 9.10 mit Hilfe von 9.11 und Lokalisierung: Seien X, $\langle X\rangle$ wie in 9.10. Wähle $\Omega_0 \in \mathfrak{F}$ mit $P[\Omega_0] = 1$, so daß auf Ω_0 gilt: $X_0 = 0$ sowie X und $\langle X\rangle$ haben stetige reelle Pfade. Setze

$$\tau_n := \inf\{t\geq 0;\ |X_t| > n\} \wedge \inf\{t\geq 0;\ \langle X\rangle_t > n\},\ \inf\emptyset := \infty.$$

Dann ist τ_n Stoppzeit nach 1.14 und es gilt $\tau_n \uparrow \infty$ auf Ω_0 wegen der Beschränktheit von X und $\langle X\rangle$ auf jedem kompakten Intervall. Dies gilt auch für $T < \infty$. Gemäß 9.7 gilt für den gestoppten Prozeß:

$$(X_t^{(n)}) := (X_{t\wedge\tau_n}) \in \mathcal{M}_c^2 \ \text{ und } \ \langle X^{(n)}\rangle_t = \langle X\rangle_{t\wedge\tau_n}.$$

Auf Ω_0 gilt: $|X^{(n)}| \le n$, $<X^{(n)}> \le n$. Aus dem beschränkten Fall 9.11 mit $Y \equiv 1$ folgt insbesondere:

$$V_t^{(2)}(\Pi, X^{\tau_n}) = \Sigma_{s\in\Pi} (X_{s\wedge\tau_n} - X_{s\_\wedge\tau_n})^2 \to <X>_{s\wedge\tau_n} \text{ n.W.}$$

Nun gilt schließlich: $P[\tau_n > t] \to 1$ und $s = s\wedge\tau_n$ auf $\{\tau_n > t\}$ für $s \in \Pi$. []

9.13 Lemma. Seien $0 < t, K < \infty$, $X \in \mathcal{M}_c^2$. Unter der Voraussetzung $|X_s| \le K \;\forall\; 0 \le s \le t$ f.s. gilt für jede Zerlegung Π von $[0,t]$: $E[V_t^{(2)}(\Pi)^2] \le 48 \cdot K^2$.

Beweis: Wir schreiben $V_t^{(2)}(\Pi)^2 = \Sigma_{r\in\Pi} \Sigma_{s\in\Pi} \cdots = 2 \cdot \Sigma_{r,s\in\Pi, r<s} \cdots + \Sigma_{r=s\in\Pi} \cdots$.

Mit 9.2c gilt zunächst für $r \in \Pi\cup\{0\}$:

$E[\Sigma_{s\in\Pi, s>r} (X_s - X_{s\_})^2 | \mathfrak{F}_r] = E[(X_t - X_r)^2 | \mathfrak{F}_r] \le 4\,K^2$.

Daraus folgt:

$$E[\Sigma_{r,s\in\Pi, s>r} (X_s - X_{s\_})^2 \cdot (X_r - X_{r\_})^2] = \Sigma_{r<t} E[(X_r - X_{r\_})^2 \cdot E[\Sigma_{s>r} (X_s - X_{s\_})^2 | \mathfrak{F}_r]]$$
$$\le 4\,K^2 \cdot E[E[\Sigma_{r\in\Pi, r>0} (X_r - X_{r\_})^2 | \mathfrak{F}_0]] \le 4\,K^2 \cdot 4\,K^2 = 16 \cdot K^4 \quad \text{sowie}$$
$$E[\Sigma_{s\in\Pi} (X_s - X_{s\_})^4] \le 4\,K^2 \cdot E[\Sigma_{s\in\Pi} (X_s - X_{s\_})^2] \le 4\,K^2 \cdot 4\,K^2 = 16 \cdot K^4. \; []$$

9.14 Lemma. Seien $0 < t, K < \infty$, $X \in \mathcal{M}_c^2$ mit Varianzenprozeß $<X>$. Unter der Voraussetzung $|X|_s \le K$, $<X>_s \le K \;\forall\; 0 \le s \le t$ f.s. gilt für Zerlegungen Π von $[0,t]$:

(a) $\lim_{\|\Pi\|\to 0} E[V_t^{(4)}(\Pi, X)] = 0$;

(b) $\lim_{\|\Pi\|\to 0} E[V_t^{(2)}(\Pi, <X>)] = 0$.

Beweis. Es gilt: $V_t^{(4)}(\Pi) \le V_t^{(2)}(\Pi) \cdot m_t(X, \|\Pi\|)^2$ mit $m_t(X, \|\Pi\|) \le 4K^2$ (vgl. (9.9a)).

Mit der Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$E[V_t^{(4)}(\Pi)]^2 \le E[V_t^{(2)}(\Pi)^2] \cdot E[m_t(X, \|\Pi\|)^4].$$

Der erste Faktor ist gemäß 9.13 beschränkt, und der zweite geht wegen (9.9b) gegen Null.

Der Beweis von (b) verläuft ebenso wegen: $V_t^{(1)}(\Pi, <X>) = <X>_t \le K$. []

9.15 Korollar (Eindeutigkeit des Varianzenprozesses). Ist $X \in \mathcal{M}_c^2$ mit Varianzenprozessen A und A', so sind A und A' nicht unterscheidbar.

Beweis. Wegen Lemma 1.3 genügt es z.z.: $A_t = A'_t$ f.s. $\forall\, t$. Gemäß Satz 9.10 folgt:

$V_t^{(2)}(\Pi) \to <X>_t$ n.W. für $<X>_t = A_t$ und $<X>_t = A'_t$. Der Limes n.W. ist aber f.s. eindeutig

$$\left[\text{wegen } P[|A_t - A'_t| > \varepsilon] \le P[|V_t^{(2)}(\Pi) - A_t| > \tfrac{1}{2}\varepsilon] + P[|V_t^{(2)}(\Pi) - A'_t| > \tfrac{1}{2}\varepsilon]\right]. \; []$$

9.16 Korollar. Ein 1–dim. standard. Brownsche Bewegung W hat f.s. Pfade, die auf jedem (noch so kleinen) Intervall von unbeschränkter totaler Variation sind.

Hilfssatz. Jede n.W. konvergente Folge (Z_n) enthält eine f.s. konvergente Teilfolge (Z_{n_k}).
Beweis: Gelte o.E. $Z_n \to 0$ n.W. Dann ex. (n_k) mit $P[|Z_{n_k}| > \frac{1}{k}] \le 1/2^k$. Es folgt: $\sum_k P[|Z_{n_k}| > \frac{1}{k}] < \infty$. Mit Borel–Cantelli folgt $P[\Omega_o^c] = 0$ für $\Omega_o^c := \cup_m \overline{\lim} \{|Z_{n_k}| > \frac{1}{m}\}$. Auf Ω_o findet Konvergenz statt. $\square$

Beweis. Von 9.10 und 9.5 wissen wir:

(9.17) $\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(2)}(\Pi,W) = t$ n.W. $\forall\, t > 0$.

Nach dem Hilfssatz existiert nun eine Folge mit

$\|\Pi_n\|\to 0$ mit $P[\Omega'] = 1$ für $\Omega' := \{\lim_{n\to\infty} V_t^{(2)}(\Pi_n) := t\}$.

Gemäß (9.9b) gilt auch $\lim_{n\to\infty} m_t(W,\Pi_n) = 0$. Gemäß (9.9a) gilt: $V_t^{(2)}(\Pi) \le V_t^{(1)}(\Pi)\cdot m_t(W,\|\Pi\|)$. Setze $V_t := \underline{\lim}_n V_t^{(1)}(\Pi_n,W)$. Es gilt nun: $\Omega' \subset \{V_t = \infty\}$. Ist $V_t = \infty$, so ist also die totale Variation in $[0,t]$ unendlich. Dann ist auch $\cup_{t\in\mathbb{Q}} \{V_t < \infty\}$ eine Nullmenge. Für $s > 0$ ist $W_{s+t} - W_s$, $t \ge 0$ auch eine Brownsche Bewegung. Also ist auch die totale Variation in $[s,s+t]$ f.s. unendlich. $\square$

Nimmt man also die Brownsche Bewegung als mathematisches Modell für die Bewegung eines Partikels, so gelangt man gemäß 9.16 zu Aussagen, die im Widerspruch zur Newtonschen Mechanik stehen. Ferner kann das stochastische Integral $\int_0^t Y_s(\omega)\, dW_s(\omega)$ nicht im Sinne der Lebesgue–Theorie definiert werden. Dies geht nur, wenn der Integrator $W_s(\omega)$ sich als Differenz von zwei maßdefinierenden Funktion schreiben läßt. Dann muß der Integrator aber zwangsläufig in jedem kompakten Intervall von beschränkter Variation sein. In §10 wird deswegen ein anderer Weg zur Definition des stochastischen Integrals beschrieben, wo das Integral nicht pfadweise (ω für ω) konstruiert wird. Die Aussage von 9.16 läßt sich verallgemeinern.

9.18 Bemerkung. Hat $X \in \mathcal{M}_c^{loc}$ f.s. nur Pfade, die auf jedem kompakten Intervall von beschränkter Variation sind, so ist X nicht unterscheidbar von $Y \equiv 0$.

Der Beweis reduziert sich durch Lokalisierung auf den Fall [vgl. v.Weizsäcker/Winkler S.88]:

(9.19) $X \in \mathcal{M}_c^2$; zu $t > 0$ ex. eine Folge (Π_t^n) von Zerlegungen von $[0,t]$ mit $\|\Pi_t^n\| \to 0$, sodaß $\sup_n V_t^{(1)}(\Pi_t^n,X) =: V_t$ quadrat–intb. ist.

Diese Bemerkung gestattet einen zweiten Beweis der Eindeutigkeit des Varianzenprozesses. Gilt nämlich $X^2 - A,\ X^2 - A' \in \mathcal{M}_c^1$, so auch $M := (X^2 - A) - (X^2 - A') = A - A' \in \mathcal{M}_c^1$. Die Pfade von A–A' sind aber in jedem kompakten Intervall von beschränkter Variation. $\square$

Zum Abschluß soll noch eine Verallgemeinerung der Vollständigkeit des $\mathscr{L}^2$ gezeigt werden.

9.20 Satz. (**Vollständigkeit von** $\mathscr{M}_c^2$). Der Zeithorizont T sei endlich.

Ist dann $(X^{(n)})$ eine Folge in $\mathscr{M}_c^2$ mit $E[\{X_T^{(n)} - X_T^{(m)}\}^2] \to 0$ für $n,m \to \infty$,

so ex. $X \in \mathscr{M}_c^2$ mit $\sup_{t\le T} E[\{X_t^{(n)} - X_t\}^2] = E[\{X_T^{(n)} - X_T\}^2] \to 0$ für $n\to\infty$.

Beweis. Für $Y \in \mathscr{M}_c^2$ setze $\|Y\|_{2,t} := (E[Y_t^2])^{\frac12} \le \|Y\|_{2,T}$ für $t \le T$, da Y^2 Submart ist.

Wähle eine Teilfolge $(n_k) \subset \mathbb{N}$ mit $\sup_{m\ge n_k} \|X_{n_k} - X_m\| \le 2^{-2k}$;, so gilt für $Y_k := X^{(n_k)}$:

$\|Y_{k+1} - Y_k\|_{2,T} \le 2^{-2k}$ (schnelle $\mathscr{L}^2$–Konvergenz) wegen $n_{k+1} \ge n_k$.

Mit der Maximal–Ungleichung 8.11 für $|Y_{k+1} - Y_k|$ folgt:

$P[A_k] := P[\sup_{[0,T]} |Y_{k+1} - Y_k| \ge 2^{-k}] \le 2^{2k} \cdot \|Y_{k+1} - Y_k\|_{2,T}^2 \le 2^{-k}$.

Mit Borel–Cantelli ergibt sich somit: $P[\overline{\lim}\, A_k] = 0$. Wähle nun Ω_0 mit $P[\Omega_0] = 1$, so daß $\Omega_0 \subset \underline{\lim}\, A_k^c$ und alle Pfade von X^n stetig sind auf Ω_0 $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dann existiert $k_0 : \Omega_0 \mapsto \mathbb{N}$, so daß auf Ω_0 gilt: $\sup_{[0,T]} |Y_{k+1} - Y_k| \le 2^{-k}$ $\forall\, k \ge k_0$,

und somit $\sup_{[0,T]} |Y_m - Y_k| \le 2^{-k+1}$ $\forall\, m > k \ge k_0$. (*)

Damit ist $\{Y_k(\omega)\}$ eine Cauchy–Folge bzgl glm. Konvergenz auf $[0,T]$ für $\omega \in \Omega_o$.

Definiert man $Y_t := \underline{\lim}_k Y_{k,t}$, so gilt auf Ω_0 wegen (*): $Y_t := \lim_k Y_{k,t}$ (schnelle $\mathscr{L}^2$– Konvergenz impliziert f.s. Konvergenz. Ferner ist $Y = (Y_t)$ adaptiert und hat auf Ω_0 sogar stetige Pfade wegen der glm. Konvergenz. Mit Fatou folgt :

$\|Y\|_{2,t} \le \| = E[\lim Y_{m,t}^2]^{\frac12} \le \underline{\lim}\, \|Y_m\|_{2,t} \le \Sigma_k \|Y_{k+1} - Y_k\|_{2,T} < \infty$ sowie

$\|Y - Y_k\|_{2,t} \le \underline{\lim}\, \|Y_m - Y_k\|_{2,t} \le \Sigma_{m\ge k} \|Y_{k+1} - Y_k\|_{2,T} \to 0$ ($\mathscr{L}^2$–Konvergenz).

Jetzt soll gezeigt werden, daß Y ein Mart ist. Wegen $E[|Y_t - Y_{k,t}|] \le \|Y - Y_k\|_{2,t}$ haben wir auch $\mathscr{L}^1$–Konvergenz, welche die Martingal–Eigenschaft erhält.

So ergibt sich nun $_A\!\int Y_s\, dP = {}_A\!\int Y_t\, dP$ für $s < t$, $A\in\mathfrak{F}_s$ wegen:

$_A\!\int Y_s\, dP = {}_A\!\int Y_{k,s}\, dP + o(1) = {}_A\!\int Y_{k,t}\, dP + o(1) = {}_A\!\int Y_t\, dP + o(1)$.

Nach 1.23 – 1.25 existiert ein Prozeß X, der von Y nicht unterscheidbar ist und dessen Pfade reellwertig, rechtsstetig und wieder f.s. stetig sind. Für diesen Prozeß X gilt:

$\|X^{(n)} - X\|_{2,T} = \|X^{(n)} - Y\|_{2,T} \le \|X^{(n)} - X^{(n_k)}\|_{2,T} + \|Y_k - Y\|_{2,T}$

und somit $\|X^{(n)} - X\|_{2,T} \to 0$.

Somit hat X alle gewünschte Eigenschaften. []

§ 10 Konstruktion des stochastischen Integrals.

Die Beschreibung deterministischer Abläufe kann durch gewöhnliche DGl. erfolgen:

$\dot{x}(t) = b(t,x(t))$ oder $dx(t) = b(t,x(t))\,dt$.

Hier soll nun der Fall behandelt werden, daß b zufällige Störungen überlagert sind:

$dX_t = (b(t,X_t) + \sigma(t,X_t)\cdot\xi_t)\,dt$.

An den stochastische Prozeß ξ können folgende Forderungen gestellt werden; man spricht dann von einem **weißen Rauschen** (white noise):

(1) Für $s\neq t$ sind die Zva ξ_s, ξ_t unabhängig;

(2) die Zva ξ_t, $t\geq 0$. sind identisch verteilt;

(3) $E[\xi_t] = 0$, d.h. die ξ_t sind (o.E.) zentriert; es liegt keine systematische Ablenkung vor.

Ein solcher Prozeß ξ kann aber keine stetigen Pfade haben; und bei Normiertheit: $E[\xi_t^2] = 1$ kann $(t,\omega) \mapsto \xi_t(\omega)$ nicht einmal mb sein [vgl. Bauer (1991), Aufg. 1, S. 442].

Man kann aber folgenden Zugang wählen. Ersetze $\xi_t\,dt$ durch dW_t, wobei W eine Brownsche Bewegung ist. Aus den obigen Eigenschaften werden dann die folgenden:

(1') Für $s<s+\Delta s<t<t+\Delta t$ gilt: $\Delta W_s := W_{s+\Delta s}-W_s$ und ΔW_t sind unabhängig;

(2') $\Delta W_t \sim N(0,\Delta t)$ $\forall t$; dies impliziert:

(3') $E[\Delta W_t] = 0$.

Man erhält dann die stochastische DGl.:

(10.0) $dX_t = b(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dW_t \;:\Leftrightarrow$

$X_t = X_0 + {}_0\!\int^t b(s,X_s)\,ds + {}_0\!\int^t \sigma(s,X_s)\,dW_s$.

Um von einer Lösung von (10.0) zu sprechen, muß also zunächst definiert werden, was man unter einem stochastischen Integral ${}_0\!\int^t Y_s\,dW_s$ versteht. Dabei wird, wie bereits im Anschluß an 9.16 erwähnt, die Konstruktion des Integrals nicht pfadweise durchgeführt.

Es sei $(W,\mathbb{F})$ eine 1–dim. standard. Brownsche Bewegung (BB) auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$. Gemäß 9.5 gilt dann:

(A1) $(W,\mathbb{F}) \in \mathcal{M}_c^2$ mit (o.E.) $\mathbb{F} = \mathbb{F}_+$;

(A2) $\langle W\rangle_t = t$, $t\geq 0$, ist Varianzenprozeß zu W.

Im folgenden werden nur diese beiden Eigenschaften (A1) und (A2) benutzt werden. Es folgt in §12 die Lévysche Charakterisierung der BB, gemäß der dann $(W,\mathbb{F})$ notwendigerweise eine BB ist. Wir gehen also von der folgenden Situation aus:

Voraussetzung für §10: W ist ein Prozeß mit (A1) und (A2). Im ersten Teil von §10 sei zudem der Zeithorizont T endlich.

Eine Klasse möglicher Integranden Y für ${}_0\!\int^t Y_s\, dW_s$ ist die folgende:

10.1 Definition: $Y \in \mathscr{L}^{<2>} = \mathscr{L}_T^{<2>}$:⇔ Y ist progressiver Prozeß mit

$$E\left[{}_0\!\int^T Y_s^2\, ds\right] \ \left(= {}_0\!\int^T E\left[Y_s^2\right] ds \right) < \infty .$$

$\mathscr{L}^{<2>}$ ist also die Klasse der progressiven Elemente von $\mathscr{L}^2(P\times\lambda_1 \big| [0,T])$.

Die Struktur dieser Obermenge, insbesondere die Dreiecksungleichung, wird im folgenden wesentlich benötigt. Zunächst beginnt man mit einer kleineren Klasse:

10.2 Definition: Ein Prozeß H heißt **elementar** :⇔ $H \in \mathscr{H}$:⇔ Es ex. eine Zerlegung Π von $[0,T]$, sowie beschränkte $\mathfrak{F}_{s\_}$ –mb Zva $\xi_{s\_}$, $s\in\Pi$, [s_ ist wieder der Vorgänger von s in Π] mit:

$$H_t(\omega) = \Sigma_{s\in\Pi}\, \xi_{s\_}(\omega)\cdot \mathbf{1}_{(s\_,s]}(t) .$$

10.3 Definition: Existiert zu einem reellen Prozeß Y ein $K<\infty$ mit $|Y_t|\le K\ \forall t$ [f.s.] für ein $K<\infty$, so heißt Y [f.s.] **beschränkt.**

Offenbar gilt für $H\in\mathscr{H}$: H ist ein an $\mathbb{F}$ adaptierter Prozeß mit linksstetigen (!) Pfaden, also progressiv, mit $H_0=0$. H ist ferner beschränkt durch $\max_{s\in\Pi} |\xi_s|$. Somit folgt:

(10.4) $\qquad \mathscr{H} \subset \mathscr{L}^{<2>}$.

Für $H \in \mathscr{H}$ kann die Def. des stochastischen Integrals noch pfadweise gegeben werden.

10.5 Definition: Sei $H \in \mathscr{H}$ wie oben. Dann heißt der Prozeß H.W, definiert durch

(10.6) $$(H.W)_t := \Sigma_{s\in\Pi}\, \xi_{s\_}\cdot(W_{s\wedge t} - W_{s\_\wedge t})$$

$$= \Sigma_{s\in\Pi, s\le t}\, \xi_{s\_}\cdot(W_s - W_{s\_}) + \xi_{s(t)}\cdot(W_t - W_{s(t)})$$

mit $s(t) = \max\,\{s\in\Pi\cup\{0\};\ s\le t\}$, **stochastisches Integral von H bzgl. W.**

In der atypischen Situation, daß der Pfad $W_.(\omega)$ eine maßdefinierende Funktion ist, stellt $(H.W)_t(\omega)$ also gerade das Integral ${}_{(0,t]}\!\int H_s(\omega)\, \mu_\omega[ds]$ dar, wobei μ_ω das zu $W_.(\omega)$ gehörige Maß ist. [$(H.W)_t$ ist analog zu einem zeitdiskreten durch $(\xi_{s\_}, s\in\Pi)$ kontrollierten Mart zu $(W_s,\ s\in\Pi\cup\{0\})$ definiert]. Es ist leicht zu zeigen, daß H.W ein Mart ist. Es gilt ferner:

10.7 Proposition. (a) Für $H\in\mathscr{H}$ ist $H.W \in \mathscr{M}_c^2$ mit Varianzenprozeß $\langle H.W\rangle_t = {}_0\!\int^t H_s^2\, ds$,

insbesondere gilt: $E\left[(H.W)_t^2\right] = E\left[{}_0\!\int^t H_s^2\, ds\right]$ (**fundamentale Isometrie**).

(b) Sind $G,H \in \mathscr{H}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, so ist $\alpha\cdot G+\beta\cdot H \in \mathscr{H}$, und es gilt:

$$(\alpha\cdot G+\beta\cdot H).W = \alpha\cdot(G.W) + \beta\cdot(H.W) .$$

Der **Bew.** ist eine leichte Übung. Es soll nun dem folgenden Programm gefolgt werden.

10.8 Programm. Zu $Y\in\mathscr{L}^{<2>}$ suche eine Folge $(H^{(n)})\subset\mathscr{H}$ mit

(10.9) $\quad E\left[{}_0\int^T \{H_t^{(n)}-Y_t\}^2\,dt\right]\to 0\ (n\to\infty)$ **(Approximation des Integranden)**.

Dann folgt mit der Linearität und der fundamentalen Isometrie in 10.7 für $m,n\to\infty$:

$E\left[\{(H^{(n)}.W)_T-(H^{(m)}.W)_T\}^2\right]=E\left[((H^{(n)}-H^{(m)}).W)_T^2\right]=E\left[{}_0\int^T\{H_s^{(n)}-H_s^{(m)}\}^2\,ds\right]\to 0.$

Auf Grund der Vollständigkeit 9.20 von $\mathscr{M}_c^2$ ex. nun ein $X =: Y.W\in\mathscr{M}_c^2$ mit:

(10.10) $\quad \sup_{t\le T} E\left[\{(H^{(n)}.W)_t-(Y.W)_t\}^2\right]\to 0\ \ (n\to\infty)$ **(Approximation des Integrals)**.

Dann definiert der Prozeß $Y.W$ das stochastische Integral gemäß ${}_0\int^t Y\,dW := (Y.W)_t$. $\square$

10.11 Bemerkung.(Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung). Ist $\varphi\in\mathscr{L}^1(\lambda_1\big|[0,T])$, so gilt für $f(t):={}_0\int^t\varphi(s)\,ds$: $\frac{d}{dt}f=\varphi$ auf $[0,T]$ λ_1–f.s. [vgl. Hewitt/Stromberg (1969) S.286].

10.12 Approximationslemma. Zu $Y\in\mathscr{L}^{<2>}$ ex. $(H^{(n)})\subset\mathscr{H}$ mit (10.9).

Bew. (i) Approximation von Y durch beschränkte progressive Prozesse $\tilde{Y}$.

Zu Y definiere $\tilde{Y}^{(K)}$ gemäß $\tilde{Y}_t^{(K)} := Y_t\cdot\mathbf{1}_{[-K,K]}(Y_t)$. Dann ist $\tilde{Y}^{(K)}$ wieder progressiv und es gilt $E\left[{}_0\int^T\{\tilde{Y}_t^{(K)}-Y_t\}^2\,dt\right]\to 0$ für $K\to\infty$ wegen maj. Konv. mit Y^2 als Majorante.

(ii) Approximation von beschränkten, progressiven Prozessen $\tilde{Y}$ durch beschränkte adaptierte Prozesse Z mit stetigen Pfaden.

Setze $\bar{Z}_t := {}_0\int^t \tilde{Y}_s\,ds$ (als Stammfunktion) und $Z_t^{(m)} := m\cdot[\bar{Z}_t-\bar{Z}_{(t-1/m)^+}]$ (als Differenzenquotienten), $m\in\mathbb{N}$. Dann sind $\bar{Z}$ und $Z^{(m)}$ beschränkte adaptierte Prozesse mit stetigen Pfaden, insbesondere progressiv. Nach 10.11 ex. zu $\omega\in\Omega$ eine Menge $N_\omega\in[0,T]\cap\mathfrak{B}_1$ mit $\lambda_1[N_\omega]=0$ und $\frac{\partial}{\partial t}\bar{Z}_t(\omega)=\tilde{Y}_t(\omega)\ \ \forall\, t\in[0,T]\setminus N_\omega$.

Dann gilt auch $\lim_{m\to\infty} Z_t^{(m)}(\omega)=\tilde{Y}_t(\omega)\ \ \forall\, t\in(0,T]\setminus N_\omega$.

Damit folgt wegen maj. Konv. auf $[0,T]$: ${}_0\int^T\{Z_t^{(m)}(\omega)-\tilde{Y}_t(\omega)\}^2\,dt\to 0$.

Wieder wegen maj. Konv., jetzt auf Ω, ergibt sich $E\left[{}_0\int^T\{Z_t^{(m)}-\tilde{Y}_t\}^2\,dt\right]\to 0$.

(iii) Approximation von beschränkten adaptierten Prozessen Z mit stetigen Pfaden durch elementare Prozesse H. Zu Zerlegungen Π von $[0,T]$ sei $H_t(\Pi)$ gemäß $H_t(\Pi):=\sum_{s\in\Pi} Z_{s\_}\cdot\mathbf{1}_{(s\_,s]}(t)$ definiert.

Dann gilt: $H(\Pi)\in\mathscr{H}$ und wegen maj. Konv. auf $[0,T]\times\Omega$:

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} E\left[{}_0\int^T\{H_t(\Pi)-Z_t\}^2\,dt\right]=0\ .$$

Aus (i) – (iii) folgt jetzt die Behauptung. $\square$

10.13 Lemma. Für $Y\in\mathscr{L}^{<2>}$ hängt $Y.W\in\mathscr{M}_c^2$, wie in 10.8 defininiert, bis auf Nichtunterscheid–barkeit nicht von der gewählten Folge $(H^{(n)})\subset\mathscr{H}$ ab.

Mehr als "bis auf Nichtunterscheidbarkeit" ist in 10.13 nicht zu erwarten. Denn gilt 10.10 für Y.W, so auch für jeden von Y.W nicht unterscheidbaren Prozeß.

Bew. von 10.13. Seien $(H_i^{(n)}) \subset \mathscr{H}$, i=1,2, mit

(10.9)$^{\mathbf{i}}$ $\quad E\left[{}_0\int^T \{H_{i,t}^{(n)} - Y_t\}^2 \, dt\right] \to 0 \ (n\to\infty)$.

Gilt nun für $X_i \in \mathscr{M}_c^2$ die Beziehung:

(10.10)$^{\mathbf{i}}$ $\quad \sup_{t\le T} E\left[\{(H_i^{(n)}.W)_t - X_{i,t}\}^2\right] \to 0 \ (n\to\infty)$,

so ist z.z., daß X_1 und X_2 nicht unterscheidbar sind. Wähle eine neue Folge $H_3^{(n)}$ als Mischung der beiden gegebenen gemäß $H_3^{(2n-i)} := H_i^{(n)}$, i=1,2, dann gilt $(10.9)^i$ auch für i=3. Wähle nun $X_3 \in \mathscr{M}_c^2$ gemäß 10.8 mit $(10.10)^i$ für i=3. Dann gilt auch

$$\sup_{t\le T} E\left[\{H_i^{(n)}.W)_t - X_{3,t}\}^2\right] \to 0 \ (n\to\infty)$$

und somit $X_{i,t} = X_{3,t}$ f.s. $\forall t$, i=1,2, also auch $X_{1,t}=X_{2,t}$ f.s. $\forall t$. Mit 1.3 folgt die Nichtunterscheidbar–keit von X_1 und X_2. []

10.14 Definition. Das **stochastische Integral** von $Y \in \mathscr{L}^{<2>}$ bzgl. W ist der bis auf Nichtunterscheidbar–keit eindeutige Prozeß $Y.W \in \mathscr{M}_c^2$, so daß (10.10) gilt für alle Folgen $(H^{(n)}) \subset \mathscr{H}$ mit (10.9).

Schreibweise: $Y.W =: {}_0\int^{\cdot} Y \, dW$, $(Y.W)_t =: {}_0\int^t Y \, dW = {}_0\int^t Y_s \, dW_s$.

In Analogie dazu soll auch die folgende **Schreibweise** benutzt werden: ${}_0\int^t Y_s \, ds =: {}_0\int^t Y \, d\lambda$.

Diese Definition setzt das Integral H.W für $H \in \mathscr{H}$ fort; dies sieht man mit $H^{(n)}:=H \ \forall n$. Allerdings ist jetzt jeder Prozeß $X \in \mathscr{M}_c^2$, der von H.W nicht unterscheidbar ist, **Version von** H.W.

Das Integral wird also global auf Ω als $\mathscr{L}^2$–Limes und nicht pfadweise definiert.

10.15 Satz. Für $Y \in \mathscr{L}^{<2>}$ hat Y.W den Varianzenprozeß $\langle Y.W\rangle_t = {}_0\int^t Y^2 \, d\lambda$.

Beweis. (i) Der angegebene Prozeß $A_t := {}_0\int^t Y^2 \, d\lambda$ hat offenbar isotone Pfade, und es gilt nach Voraussetzung an Y: $E[A_T]<\infty$ und somit $P[A_T<\infty]=1$. Auf $\{A_T<\infty\}$ sind die Pfade von A stetig. Auf $\{A_T<\infty\}^c$ kann aber der Fall ${}_0\int^t Y^2(\omega) \, d\lambda < \infty$, ${}_0\int^u Y^2(\omega) \, d\lambda = \infty \ \ \forall$ u>t, auftreten. Als eine rechtsstetige an $\mathbb{F}_+ = \mathbb{F}$ adaptiert Version kann dann (A_{t+}) gewählt werden.

(ii) Für $X \in \mathscr{M}_c^2$ gilt: $E[X_t^2 - X_s^2 \,|\, \mathscr{F}_s] = E[\{X_t - X_s\}^2 \,|\, \mathscr{F}_s]$, s<t, [vgl. 9.7a].

Also ist $(Y.W)^2 - A$ genau dann ein Mart, wenn gilt (mit X = Y.W):

(10.15a) $\quad E\left[\mathbf{1}_B \cdot \{(Y.W)_t - (Y.W)_s\}^2\right] = E\left[\mathbf{1}_B \cdot {}_s\int^t Y^2 \, d\lambda\right]$, $\forall$ s<t, $B \in \mathfrak{F}_s$.

Sei jetzt $Y \in \mathscr{L}^{<2>}$ und $(H^{(n)}) \subset \mathscr{H}$ wie in (10.9). Dann folgt aus (10.10) :

$$E[\mathbf{1}_B \cdot \{(Y.W)_t - (Y.W)_s\}^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$= E[\mathbf{1}_B \cdot \{(H^{(n)}.W)_t - (H^{(n)}.W)_s\}^2]^{\frac{1}{2}} + o(1) \quad \text{(Dreiecksungleichung in } \mathscr{L}^2(P|_B))$$
$$= E[\mathbf{1}_B \cdot {}_s\!\int^t (H^{(n)})^2\, d\lambda]^{\frac{1}{2}} + o(1) \quad \text{((10.15a) für } Y \in \mathscr{H} \text{ gemäß 10.7a)}$$
$$= E[\mathbf{1}_B \cdot {}_s\!\int^t Y^2\, d\lambda\,]^{\frac{1}{2}} + o(1) \quad \text{(Dreiecksungleichung in } \mathscr{L}^2(P|_B \times \lambda_1|_{[s,t]})). \,\Box$$

Als Korollar ergibt sich mit 9.7b oder (10.15):

10.16 Fundamentale Isometrie. Für $Y \in \mathscr{L}^{<2>}$ gilt: $E[\{{}_0\!\int^t Y\, dW\}^2] = E[{}_0\!\int^t Y^2\, d\lambda]$, $t \geq 0$.

Mit dieser Beziehung kann etwa aus dem Verschwinden von Y auf das Verschwinden von ${}_0\!\int^t Y\, dW$ oder aus der Konvergenz von $Y^{(n)}$ gegen Null auf die Konvergenz von ${}_0\!\int^t Y^{(n)}\, dW$ gegen Null geschlossen werden.

10.17 Linearität. Sind $Y_1, Y_2 \in \mathscr{L}^{<2>}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha \cdot Y_1 + \beta \cdot Y_2 \in \mathscr{L}^{<2>}$ und es gilt:

$${}_0\!\int^{\cdot} (\alpha \cdot Y_1 + \beta \cdot Y_2)\, dW = \alpha \cdot {}_0\!\int^{\cdot} Y_1\, dW + \beta \cdot {}_0\!\int^{\cdot} Y_2\, dW \quad \text{f.s. .}$$

Beweis. Da der $\mathscr{L}^2$ ein Vektorraum ist, folgt die erste Behauptung. Wähle nun $H_i^{(n)} \in \mathscr{H}$, i=1,2, im Sinne von (10.9) für Y_i. Aus der Dreiecksungleichung im $\mathscr{L}^2$ folgt, daß $\alpha \cdot H_1^{(n)} + \beta \cdot H_2^{(n)}$ Approximation von $\alpha \cdot Y_1 + \beta \cdot Y_2$ ist. Damit ist $(\alpha \cdot H_1^{(n)} + \beta \cdot H_2^{(n)}).W = \alpha \cdot (H_1^{(n)}.W) + \beta \cdot (H_2^{(n)}.W)$ Approximation von $(\alpha \cdot Y_1 + \beta \cdot Y_2).W$, andererseits wegen 10.7b auch von $\alpha \cdot (Y_1.W) + \beta \cdot (Y_2.W)$. Somit sind $(\alpha \cdot Y_1 + \beta \cdot Y_2).W$ und $\alpha \cdot (Y_1.W) + \beta \cdot (Y_2.W)$ nicht unterscheidbar gemäß 10.13. $\Box$

Das folgende Lemma zeigt, daß der Verlauf des stochastischen Integral bis zu einer Stoppzeit nur vom Verlauf des Integranden bis zu dieser Stoppzeit abhängt. Zu $X := Y.W$ sei $X_{t\wedge\tau}$ wie üblich definiert.

10.18 Lokalisierungslemma. Sei $Y \in \mathscr{L}^{<2>}$ und τ Stoppzeit. Dann gilt $(Y_t \cdot \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}}, t \geq 0) \in \mathscr{L}^{<2>}$ und ${}_0\!\int^{t\wedge\tau} Y\, dW = {}_0\!\int^t Y_s \cdot \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}}\, dW_s$, $t \geq 0$, f.s. .

Bew. (0) Setze $Z_t := \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}}$ und $\tilde{Y}_t := Y_t \cdot Z_t$. Dann ist der Prozeß Z adaptiert und hat linksstetige Pfade, ist also progressiv. Somit ist auch $\tilde{Y}$ progressiv und es gilt: $|\tilde{Y}_t| \leq |Y_t|$.

(i) $((Y.W)_{t\wedge\tau}, t \geq 0)$ und $((\tilde{Y}.W)_{t\wedge\tau}, t \geq 0)$ sind nicht unterscheidbar.

Der Beweis dazu ist typisch für die Theorie. Die Eigenschaften für $\int ...dW$ werden zurückgeführt auf die entsprechenden Eigenschaften für $\int ...d\lambda$. Es gilt $Y - \tilde{Y} \in \mathscr{L}^{<2>}$ sowie nach 9.7 und 10.15: $E[((Y-\tilde{Y}).W)^2_{t\wedge\tau}] = E[<(Y-\tilde{Y}).W>_{t\wedge\tau}] = E[{}_0\!\int^{t\wedge\tau} (Y-\tilde{Y})^2\, d\lambda] = 0$.

Also gilt wegen der Linearität $(Y.W)_{t\wedge\tau} = (\tilde{Y}.W)_{t\wedge\tau}$ f.s. . Mit 1.3 folgt die Beh. (i).

(ii) $((\tilde{Y}.W)_{t\wedge\tau},\ t\geq 0)$ und $\tilde{Y}.W$ sind nicht unterscheidbar.

Mit 9.7a folgt nämlich $E[\{(\tilde{Y}.W)_t - (\tilde{Y}.W)_{t\wedge\tau}\}^2] = E[<\tilde{Y}.W>_t - <\tilde{Y}.W>_{t\wedge\tau}\}^2 = E[{}_{t\wedge\tau}\int^t \tilde{Y}^2\, d\lambda] = 0.$

Jetzt folgt die Beh. (ii) wieder aus 1.3. Damit ist auch alles gezeigt. []

10.19 Definition. Für $Y \in \mathscr{L}^{<2>}$ setzt man: ${}_s\int^t Y\, dW := {}_0\int^t Y\, dW - {}_0\int^s Y\, dW$ für $0\leq s\leq t$.

10.20 Lemma. Sei $Y \in \mathscr{L}^{<2>}$, ξ beschränkter adaptierter Prozeß, Π Zerlegung von $[0,t]$ und $0\leq s\leq t\leq T$; dann gilt:

(a) ${}_s\int^t Y\, dW = {}_0\int^T \mathbf{1}_{(s,t]}(u)\cdot Y_u\, dW_u$ f.s.;

(b) ${}_s\int^t \xi_s \cdot Y\, dW = \xi_s \cdot {}_s\int^t Y\, dW$ f.s.;

(c) ${}_0\int^t\{\Sigma_{s\in\Pi}\, \xi_{s\_} \cdot \mathbf{1}_{(s\_,s]}(u)\}\, Y_u\, dW_u = \Sigma_{s\in\Pi}\, \xi_{s\_} \cdot {}_{s\_}\int^s Y\, dW$ f.s. .

Bew. a) Mit dem Lokalisierungslemma 10.18 folgt die Aussage zunächst für s=0 und dann mit der Linearität 10.17 und $\mathbf{1}_{(s,t]}=\mathbf{1}_{(0,t]}-\mathbf{1}_{(0,s]}$ für jedes $s\leq t$.

Teil (b) ist eine Übungsaufgabe; man betrachtet zunächst den Fall $Y\in\mathscr{H}$. Teil (c) folgt aus (a) und (b). []

Jetzt soll die Definition des Integral erweitert werden, einmal auch auf den Fall $T=\infty$ und zum andern auf eine größere Klasse $\mathscr{P}^2$ von Integranden. Bei der letzteren Erweiterung braucht das Integral lediglich ein lokales Mart zu sein.

Voraussetzung: Sei also jetzt **$T=\infty$** .

10.21 Definition. Sei $\mathscr{P}^i$, $i\in\mathbb{N}$, die Klasse der progressiven Prozesse Y mit

(10.22) ${}_0\int^t |Y|^i\, d\lambda < \infty$ f.s. $\forall t$.

Da jede reelle stetige Funktion auf kompakten Intervallen beschränkt ist, gilt:

(10.23) Hat Y reellwertige, f.s. stetige Pfade, so gilt: $Y \in \mathscr{P}^i$, $i\in\mathbb{N}$.

10.24 Programm. Zu $Y\in\mathscr{P}^2$ definiere $\tau_n := n \wedge \inf\{t\geq 0;\ {}_0\int^{t+} Y^2\, d\lambda > n\}$ für $n\in\mathbb{N}_0$. (Dabei wird wie im Beweis von 10.15 eine rechtsstetige Version von ${}_0\int^{\cdot} Y^2\, d\lambda$ genommen.) Dann ist τ_n nach 1.14a Stoppzeit, und es gilt wegen (10.22): $\tau_n \uparrow \infty$ f.s.

Setze nun $Y_t^{(n)} := Y_t \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_n\geq t\}}$. Dort wo die Pfade von ${}_0\int^{\cdot} Y^2\, d\lambda$ stetig sind, insbesondere auf der Menge $\cap_{m\in\mathbb{N}}\{{}_0\int^m Y^2\, d\lambda < \infty\}$ vom Maß 1, gilt: ${}_0\int^n \{Y^{(n)}\}^2\, d\lambda = {}_0\int^{\tau_n} Y^2\, d\lambda \leq n$.

Somit erhält man: $(Y_t^{(n)},\ 0\leq t\leq n) \in \mathscr{L}_T^{<2>}$ mit $T = n$,

sowie auf Grund des Lokalisierungslemmas 10.18 die folgende **Konsistenzbedingung**:

(10.25**)** ${}_0\int^t Y^{(m)} dW = {}_0\int^{t\wedge\tau_m} Y^{(n)}\, dW$, $0\leq t\leq n$, f.s., $m\leq n\in\mathbb{N}$.

Diese Konsistenzbedingung gestattet nun eine von n unabhängige Definition des Integrals:

10.26 Definition. Zu $Y \in \mathscr{S}^2$ sei $Y^{(n)}$ wie in 10.24 gewählt.

Dann definiert man das **stochastische Integral** ${}_0\int^{\cdot} Y\,dW = Y.W$ gemäß

$$ {}_0\int^t Y\,dW = \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{\tau_{m-1}\le t<\tau_m\}} \cdot {}_0\int^t Y^{(m)}\,dW \ . $$

Aus der Konsistenzbedingung (10.25) folgt :

(10.27a) $\mathbf{1}_{\{0<t\le\tau_n\}} \cdot {}_0\int^t Y\,dW = \mathbf{1}_{\{0<t\le\tau_n\}} \cdot {}_0\int^t Y^{(n)}\,dW$ f.s. $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

(10.27b) ${}_0\int^{t\wedge\tau_n} Y\,dW = {}_0\int^t Y^{(n)}dW$, $0\le t\le n$, f.s. $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Dabei ist $\{{}_0\int^t Y^{(n)}dW\ ,\ 0\le t\le n\}$ ein Mart mit letztem Element und somit gleichmäßig integrierbar. Damit ist ${}_0\int^{\cdot} Y\,dW$ ein lokales Martingal mit Lokalisierungsfolge $\{\tau_n\}$. Die Beziehung (10.2) gilt nach dem Lokalisierungslemma 10.18 auch für das Integral im Sinne von Def. 10.14. Also setzt das Integral von Def. 10.26 das Integral von Def. 10.14 fort.

10.28 Satz. Das stochastische Integral von $Y \in \mathscr{S}^2$ bzgl. W ist der bis auf Nichtunterscheidbar–keit eindeutige Prozeß ${}_0\int^{\cdot} Y\,dW \in \mathscr{M}_c^{loc}$, so daß für alle Stoppzeiten τ die folgende **Lokalisierungseigenschaft** erfüllt ist:

(10.29) ${}_0\int^{t\wedge\tau} Y\,dW = {}_0\int^t Y_s \cdot \mathbf{1}_{\{s\le\tau\}}\,dW_s$, $t\ge 0$, f.s. ,

Ferner gilt die folgende **fundamentale Isometrie**, wenn deren rechte Seite endlich ist:

(10.30) $E\left[\{{}_0\int^{t\wedge\tau} Y\,dW\}^2\right] = E\left[{}_0\int^{t\wedge\tau} Y^2\,d\lambda\right]$.

Bew. Aus der Def. 10.26 folgt, daß Y.W adaptiert ist. Gemäß (10.27) ist Y.W ein lokales Mart mit f.s. stetigen Pfaden; somit gilt $Y.W \in \mathscr{M}_c^{loc}$. Zum Beweis von (10.29) setze $\tilde{Y} := (Y_t \cdot \mathbf{1}_{\{t\le\tau\}}, t\ge 0) \in \mathscr{S}^2$ und definiere $\tilde{\tau}_n$, $\tilde{Y}^{(n)}$ wie in 10.24 zu $\tilde{Y}$. Dann gilt $\tau_n \le \tilde{\tau}_n$. Nun folgt mit (10.27) und dem Lokalisationslemma 10.18:

${}_0\int^{t\wedge\tau\wedge\tau_n} Y\,dW = {}_0\int^{t\wedge\tau} Y^{(n)}\,dW = {}_0\int^t Y_s^{(n)} \cdot \mathbf{1}_{\{s\le\tau\}}\,dW_s$ f.s. . Ebenso folgt:

${}_0\int^{t\wedge\tau_n} \tilde{Y}\,dW = {}_0\int^{t\wedge\tau_n\wedge\tilde{\tau}_n} \tilde{Y}\,dW = {}_0\int^{t\wedge\tau_n} \tilde{Y}^{(n)}\,dW = {}_0\int^t \tilde{Y}_s^{(n)} \cdot \mathbf{1}_{\{s\le\tau_n\}}\,dW_s$ f.s.

Die rechten Seiten der beiden Gleichungsketten sind aber gleich. Somit folgt:

$$ {}_0\int^{t\wedge\tau\wedge\tau_n} Y\,dW = {}_0\int^{t\wedge\tau_n} \tilde{Y}\,dW \ ,\ t\le n, \text{ f.s. } . $$

Mit $n\to\infty$ folgt jetzt (10.29). Sei nun die rechte Seite von (10.30) endlich, d.h. $\tilde{Y} \in \mathscr{L}_t^{<2>}$, und o.E $\tau\wedge t = \tau$. Dann folgt aus (10.29) und der fundamentalen Isometrie 10.16:

$$ E\left[\{{}_0\int^{t\wedge\tau} Y\,dW\}^2\right] = E\left[\{{}_0\int^t \tilde{Y}\,dW\}^2\right] = E\left[{}_0\int^t \tilde{Y}^2\,d\lambda\right] = E\left[{}_0\int^{t\wedge\tau} Y^2\,d\lambda\right]. $$

Zum Nachweis der Eindeutigkeit wähle $X \in \mathscr{M}_c^{loc}$ mit $X_{t\wedge\tau} = {}_0\int^t \tilde{Y}\, dW$, t≥0, f.s. für alle Stoppzeiten .
Mit $\tau=\tau_n$ und (10.27) folgt: $X_{t\wedge\tau_n} = {}_0\int^t Y^{(n)}\, dW = {}_0\int^{t\wedge\tau_n} Y\, dW$, $0\le t\le n$, f.s. .
Mit $n\to\infty$ ergibt sich schließlich: $X_t = {}_0\int^t Y\, dW$. []

10.31 Folgerung. Ist $T = \infty$ und ist $Y \in \mathscr{L}_\infty^{<2>}$, d.h. ist Y ein progressiver reeller Prozeß mit $E\left[{}_0\int^t Y^2\, d\lambda\right] < \infty \quad \forall\, t\ge 0$, so ist $Y.W = {}_0\int^\cdot Y\, dW \in \mathscr{M}_c^2$ mit Varianzenprozeß

$$<Y.W>_t = {}_0\int^t Y^2\, d\lambda\ ,\ t\ge 0.$$

Bew. Für $N\in\mathbb{N}$ setze $Y_{|N} := (Y_t, 0\le t\le N)$; dann gilt: $Y_{|N} \in \mathscr{L}_N^{<2>}$. Aus (10.29) folgt mit $\tau=N$: $((Y.W)_t, t\le N) = ((Y_{|N}.W)_t, t\le N)$ f.s. , wobei das rechte Integral im Sinne von Def. 10.14 gewählt werden kann.
[]

10.32 Linearität. (a) Sei $X_i \in \mathscr{M}_c^{loc}$, i = 1, 2, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gilt: $\alpha\cdot X_1 + \beta\cdot X_2 \in \mathscr{M}_c^{loc}$.
(b) Sind $Y_i \in \mathscr{I}^2$, i = 1, 2, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gilt: $\alpha\cdot Y_1 + \beta\cdot Y_2 \in \mathscr{I}^2$ und

$${}_0\int^\cdot (\alpha\cdot Y_1 + \beta\cdot Y_2)\, dW = \alpha\cdot {}_0\int^\cdot Y_1\, dW + \beta\cdot {}_0\int^\cdot Y_2\, dW \quad \text{f.s. .}$$

Der **Beweis** ist eine Übungsaufgabe.

§11 Die Itô–Formel.

Aus der klassischen Differentialrechnung ist die folgende Differentialformel bekannt:

$$\frac{d}{dt} f(t,x(t)) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,x(t)) + \frac{\partial}{\partial x} f(t,x(t)) \cdot \frac{d}{dt} x(t) = \dot{f}(t,x(t)) + f\,'(t,x(t)) \cdot \dot{x}(t).$$

oder $\quad d\, f(t,x(t)) \;=\; \dot{f}(t,x(t))\, dt + f\,'(t,x(t)) \cdot dx(t).$

Jetzt soll die entsprechende Formel hergeleitet werden für ein stochastisches Integral X anstelle der Funktion $x(\cdot)$.

Wie in §10 sei W ein Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit Filterung $\mathbb{F}$, so daß die Bedingungen (A1) und (A2) erfüllt sind. Dabei liege o.E. $T<\infty$ vor. Nützlich ist die folgende Klasse von Prozessen X, die abgeschlossen ist gegenüber der Bildung von $f(t,X_t)$ für hinreichend reguläre Funktionen f, was für die Klasse der stochastischen Integrale nicht gilt.

11.1 Definition. Ein **1–dimensionaler Itô–Prozeß** ist ein reeller stochastischer Prozeß X mit $\lceil$rechts–stetigen und$\rceil$ f.s. stetigen Pfaden, so daß gilt:

(11.2) $\qquad X_t = X_0 + {}_0\!\int^t Z\, d\lambda + {}_0\!\int^t Y\, dW$, wobei X_0 $\mathfrak{F}_0$–mb. Zva, $Z \in \mathscr{I}^1$, $Y \in \mathscr{I}^2$ ist.

Man sagt auch: X besitzt das **stochastische Differential** $dX_t = Z_t\, dt + Y_t\, dW_t$.

Ein Itô–Prozeß ist also eine Verallgemeinerung einer BB mit Drift b und Dispersionskoeffizienten σ; dieser Spezialfall ergibt sich mit $Z \equiv b$, $Y \equiv \sigma$.

Ein Itô–Prozeß ist ein spezielles f.s. stetiges **Semi–Martingal** X, das sich in der Form $X = X_0 + M + V$ schreiben läßt, wobei $M \in \mathscr{M}_c^{loc}$ und $V = A_+ - A_-$ gilt; die Prozesse $A_\pm$ haben dabei f.s. stetige und wachsende Pfade. Hier gilt $A_\pm = {}_0\!\int^{\cdot} Z^\pm\, d\lambda$.

11.3 Bemerkung. Zu $Z \in \mathscr{I}^1$ ex. (gemäß 4.25) ein reeller Prozeß I mit rechtsstetigen und f.s. stetigen Pfaden, $\qquad$ sodaß gilt: $I_t = {}_0\!\int^t Z\, d\lambda$, $t\geq 0$, f.s.

In Zukunft ist immer diese Version I von ${}_0\!\int^{\cdot} Z\, d\lambda$ gemeint.

$\lceil$Die Modifikation kann hier gemäß $I_s=0$, $s \geq t$, für ${}_0\!\int^{t+} |Z|\, d\lambda = \infty$ vorgenommen werden, während bei dem wachsenden Prozeß A aus 10.15 die Modifikation $A_t=\infty$ für ${}_0\!\int^{t+} Y^2\, d\lambda = \infty$ zweckmäßiger war. $\rceil$ $\square$

11.4 Definition. $C^{1,2} = C^{1,2}(\lceil 0,T\rceil,\mathbb{R})$ ist die Klasse aller reellen (stetigen) Funktionen f auf $\lceil 0,T\rceil \times \mathbb{R}$ mit: $\dot{f}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$ ist stetig, $f\,'(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ ist stetig, $f\,''(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x)$ ist stetig.

Für einen Itô–Prozeß der Gestalt (11.2) setzt man: ${}_0\!\int^{\cdot} V\, dX := {}_0\!\int^{\cdot} V \cdot Z\, d\lambda + {}_0\!\int^{\cdot} V \cdot Y\, dW$, sofern die Integrale auf der rechten Seite erklärt sind.

Ziel ist der Beweis der folgenden Itô–Formel für einen Itô–Prozeß der Gestalt (11.2):

(11.5) (**1–dim. Itô–Formel**) Für $f \in C^{1,2}$ gilt:

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + {}_0\!\int^t \dot f(s,X_s)\,ds + {}_0\!\int^t f'(s,X_s)\,dX_s + \tfrac12\, {}_0\!\int^t f''(s.X_s)\cdot Y_s^2\,ds$$
$$= f(0,X_0) + {}_0\!\int^t \{\dot f(s,X_s) + f'(s,X_s)\cdot Z_s + \tfrac12 f''(s,X_s)\cdot Y_s^2\}\,ds$$
$$+ {}_0\!\int^t f'(s,X_s)\cdot Y_s\,dW_s\,,\ t\ge 0,\ \text{f.s.}$$

Mit anderen Worten: $f(t,X_t)$ hat das stochastische Differential

$$df(t,X_t) = \dot f(t,X_t)\,dt + f'(t,X_t)\,dX_t + \tfrac12 f''(t,X_t)\,d\langle X\rangle_t\ .$$

Der Term $\frac12 f''(s,X_s)\cdot Y_s^2\,ds$ rührt daher, daß $\langle Y.W\rangle$ die quadratische Variation (Varianzeprozeß) ${}_0\!\int^{\cdot} Y^2\,d\lambda$ in Sinne von 9.10 hat. Da das Lebesgue–Integrals in (11.2) Pfade von beschränkter Variation hat, stellt $\langle Y.W\rangle$ auch die quadratische Variation $\langle X\rangle$ von X dar [vgl. 11.7 mit $U_t \equiv 1$]. In der klassischen Differential– und Integralrechnung werden nur Funktionen von beschränkter Variation, also mit verschwindener quadratischer Variation betrachtet.

Heuristik: Zunächst soll ein heuristischer Beweis von (11.5) gegeben werden, wie er etwa bei Ingenieuren beliebt ist. Entscheidend ist, daß man die Taylorformel für infinitesimale Incremente bis zur 2–ten Stufe benutzen muß:

$$d\,f(t,X_t) = \dot f(t,X_t)\,dt + \ddot f(t,X_t)\,(dt)^2 + f'(t,X_t)\cdot dX_t + \tfrac12 f''(t,X_t)\,(dX_t)^2$$
$$= \dot f(t,X_t)\,dt + f'(t,X_t)\cdot[Z_t\,dt + Y_t\,dW_t] + \tfrac12 f''(t,X_t)\cdot[Z_t\,dt + Y_t\,dW_t]^2$$
$$= [\dot f(t,X_t) + f'(t,X_t)\cdot Z_t]\,dt + f'(t,X_t)\cdot Y_t\,dW_t + \tfrac12 f''(t,X_t)\cdot[Y_t\,dW_t]^2$$
$$= [\dot f(t,X_t) + f'(t,X_t)\cdot Z_t + \tfrac12 f''(t,X_t)\cdot Y_t^2]\,dt + f'(t,X_t)\cdot Y_t\,dW_t\,.$$

Dabei wurde gesetzt: $(dW_t)^2 = dt$, was durch (9.17) motiviert ist,

$(dt)^2 = 0$, $dt\cdot dW_t = 0$, was motiviert wird durch

$\lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{s\in\Pi} (s - s\_)\cdot(X_s - X_{s\_}) = 0$ n.W.

Diese Beziehung kann mit der Methode von (9.9) gezeigt werden. Ähnlich motiviert man $(dt)^2 = 0$. []

Aus (10.23) folgt leicht:

11.6 Lemma. Sind X,Y,Z wie (11.2), so gilt:

$(\dot f(t,X_t),t\ge 0)$, $(f'(t,X_t)\cdot Z_t,t\ge 0)$, $(\frac12 f''(t,X_t)\cdot Y_t^2,t\ge 0) \in \mathscr{L}^1$, $(f'(t,X_t)\cdot Y_t,t\ge 0) \in \mathscr{L}^2$.

11.7 Lemma. Seien X,Y,Z wie in (11.2), U ein reeller progressiver Prozeß. Es existiere ein $K<\infty$ mit:

${}_0\!\int^T |Z|\,d\lambda \le K$, $|{}_0\!\int^t Y\,dW| \le K$, ${}_0\!\int^T Y^2\,d\lambda \le K$, $|U_t| \le K$, $0\le t\le T$, f.s.

Dann gilt für Zerlegungen Π von $[0,T]$:

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} E[\{\textstyle\sum_{s\in\Pi} U_{s\_}(X_s - X_{s\_})^2 - {}_0\!\int^t U\cdot Y^2\,d\lambda\}^2] = 0\,.$$

Der **Beweis** folgt für den Fall $Z\equiv 0$, f.s. aus 9.11 mit 10.15. Die Übertragung auf den vorliegenden Fall ist eine Übung. $\square$

11.8 Satz (Itô). Sei X ein Itô–Prozeß der Gestalt (11.2), $f\in C^{1,2}$, Dann ist $(f(t,X_t),\ t\geq 0)$ ein Itô–Prozeß mit (11.5).

Bew. In Hinblick auf 1.3 braucht nur ein fester Zeitpunkt betrachtet werden. Wegen der Lokalisierungseigenschaft (10.29) von Y.W kann dieser als Horizont $T<\infty$ angenommen werden. Setze $\hat{X}_t := |X_0| + {}_0\!\int^t |Z|\, d\lambda + \sup_{s\leq t} |{}_0\!\int^s Y\, dW| + {}_0\!\int^t Y^2\, d\lambda$, $t\geq 0$.

(i) **Der beschränkte Fall.** Es existiere ein $K<\infty$ mit $\hat{X}_T \leq K$ f.s. , insbesondere $Y\in \mathscr{L}_T^{<2>}$.

Wähle nun $\Omega_0\in\mathfrak{F}$ mit $P[\Omega_0]=1$, so daß der Pfad $X_\cdot(\omega)$ stetig ist und $\hat{X}_T(\omega)\leq K$ gilt für $\omega\in\Omega_0$. Dann folgt auch: $|X_\cdot(\omega)|\leq K\ \forall\ \omega\in\Omega_0$.

Die stetigen Funktion f, $\dot{f}$, f ' und f " sind betragsmäßig beschränkt auf dem Kompaktum $[0,T]\times[-K,K]$, etwa durch $\tilde{K}$.

Sei nun Π eine Zerlegung von $[0,T]$. Dann gilt auf Ω_0:

$$f(T,X_T) - f(0,X_0) = \sum_{s\in\Pi} \{f(s,X_s) - f(s_-,X_{s_-})\}$$

$$= \sum_{s\in\Pi} \{[f(s,X_s) - f(s_-,X_s)] + [f(s_-,X_s) - f(s_-,X_{s_-})]\}$$

$$= \sum_{s\in\Pi} \{{}_{s_-}\!\int^s \dot{f}(t,X_s)\, dt + f'(s_-,X_{s_-})(X_s - X_{s_-}) + \tfrac{1}{2} f''(s_-,\xi_s)(X_s - X_{s_-})^2\}$$

$$=: J_1(\Pi) + J_2(\Pi) + J_3(\Pi) \text{ für ein } \xi_s \text{ mit } |\xi_s - X_{s_-}| \leq |X_s - X_{s_-}| \text{ .}$$

ad J_1) Mit $G_t(\Pi) := \sum_{s\in\Pi} \dot{f}(t,X_s)\cdot \mathbf{1}_{(s_-,s]}(t)$ gilt gerade $J_1(\Pi) = {}_0\!\int^T G(\Pi)\, d\lambda$ sowie:

$G_t(\Pi) \to \dot{f}(t,X_t)$ auf Ω_0 für $\|\Pi\|\to 0$. Wegen maj. Konv. auf $[0,T]$ folgt somit:

(i) $:= J_1(\Pi) - {}_0\!\int^T \dot{f}(t,X_t)\, dt \to 0$ auf Ω_0 (, also liegt f.s. Konvergenz vor).

ad J_2) Setze $F_t := f'(t,X_t)$ und $H_t(\Pi) := \sum_{s\in\Pi} F_{s_-}\cdot \mathbf{1}_{(s_-,s]}(t)$. Auf Ω_0 gilt nun:

$H_t(\Pi) \to F_t\ \forall\ t\leq T$. Die Zerlegung (11.2) bewirkt eine Zerlegung $J_2 := J_2^\lambda + J_2^W$.

ad J_2^λ) $J_2^\lambda(\Pi) = \sum_{s\in\Pi} F_{s_-}\cdot {}_{s_-}\!\int^s Z\, d\lambda = {}_0\!\int^T H(\Pi)\cdot Z\, d\lambda$.

Wegen maj. Konv. auf $[0,T]$ mit Majorante $\tilde{K}\cdot|Z|$ folgt:

(ii)$^\lambda := J_2^\lambda(\Pi) - {}_0\!\int^T F\cdot Z\, d\lambda \to 0$ auf Ω_0 .

ad J_2^W) $J_2^W(\Pi) = \sum_{s\in\Pi} F_{s_-}\cdot {}_{s_-}\!\int^s Y\, dW = {}_0\!\int^T H(\Pi)\cdot Y\, dW$ wegen 10.20c.

Mit der Linearität 10.17 und der fundamentalen Isometrie 10.16 folgt:

$E[\{(ii)^W\}^2] := E[\{J_2^W(\Pi) - {}_0\int^T F\cdot Y\,dW\}^2] = E[\{{}_0\int^T (H(\Pi)-F)Y\,dW\}^2]$

$= E[{}_0\int^T (H(\Pi)-F)^2\cdot Y^2\,d\lambda] \to 0$ wegen maj. Konv. auf $[0,T]\times\Omega_0$ mit Majorante $(2\tilde{K})^2 Y^2$.

ad J_3) Setze $U_t := \frac{1}{2} f''(t,X_t)$ und $J_3^*(\Pi) := \Sigma_{s\in\Pi} U_{s\_}\cdot(X_s - X_{s\_})^2$. Dann gilt:

$|(iiia)| := |J_3^*(\Pi) - J_3(\Pi)| \le \Sigma_{s\in\Pi} \frac{1}{2}\cdot|f''(s\_,\xi_s) - f''(s\_,X_{s\_})|\cdot(X_s - X_{s\_})^2$

$\le \eta_T(\delta(\Pi))\cdot V_T^{(2)}(\Pi)$ mit $V_T^{(2)}(\Pi) := \Sigma_{s\in\Pi}(X_s - X_{s\_})^2$,

$\delta(\Pi) := \max_{s\in\Pi}|X_s - X_{s\_}| \to 0$ und

$\eta_T(\delta) := \max_{t\le T, x,y\in[-K,K], |x-y|\le\delta} \frac{1}{2}\cdot|f''(t,x) - f''(t,y)| \to 0$.

Dabei gilt: $\delta(\Pi)\to 0$ für $\|\Pi\|\to 0$ auf Ω_0 und $\eta_T(\delta)\to 0$ für $\delta\to 0$ etwa wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f'' auf $[0,T]\times[-K,K]$.

Mit der Schwarzschen Ungleichung erhält man:

$E[|(iiia)|]^2 \le E[\eta_T(\delta(\Pi))^2]\cdot E[V_T^{(2)}(\Pi)^2]$;

dabei gilt: $E[\eta_T(\delta(\Pi))^2] \to 0$ wegen maj. Konv. auf Ω_0 und

$E[V_T^{(2)}(\Pi)^2] \to E[\{{}_0\int^T Y^2\,d\lambda\}^2]$ wegen 11.7 (mit $U\equiv 1$), also

$\lim_{\|\Pi\|\to 0} E[\{V_T^{(2)}(\Pi) - {}_0\int^t Y^2\,d\lambda\}^2] = 0$,

und der Stetigkeit der Norm in $\mathscr{L}^2$, also

$E[|(iiia)|] \to 0$.

Für J_3^* folgt nun aus 11.7: $E[\{(iiib)\}^2] := E[\{J_3^*(\Pi) - {}_0\int^T U\cdot Y^2\,d\lambda\}^2] \to 0$.

Bildet man die Differenz Δ_T der linken und rechten Seite der Itô–Formel, so hat man jetzt die folgende Situation:

$\Delta_T = f(T,X_T) - f(0,X_0) - {}_0\int^T \dots\,dt - {}_0\int^T \dots dW_t$

$= [(i)] + [(ii)^\lambda] + [(ii)^W] + [(iiia)] + [(iiib)]$;

dabei konvergieren die Klammerausdrücke $[\dots]$ für $\|\Pi\|\to 0$ gegen Null entweder f.s. oder in einem $\mathscr{L}^p$, p=1,2. Beide Konvergenzarten ziehen die Konvergenz n.W. gegen Null nach sich; also gilt auch $\Delta_T \to 0$ n.W. , wobei Δ_T nicht von Π abhängt. Dies kann nur sein, wenn $\Delta_T = 0$ f.s. gilt, was zu zeigen war.

(ii) **Der unbeschränkte Fall** wird durch Lokalisierung auf den beschränkten Fall zurückgeführt. Sei

$\tau_n := T\wedge\inf\{t\ge 0;\ \hat{X}_t > n\}$, $C_n := \{|X_0|\le n\} \in \mathfrak{F}_0$.

[Ist X_0 f.s. konstant oder auch nur f.s. beschränkt, so kann $C_n := \Omega$ gesetzt werden.] Da $\hat{X}$ o.E. reellwertige, rechtsstetige und f.s. stetige Pfade hat, ist τ_n Stoppzeit und auf C_n gilt f.s.: $\hat{X}_{\tau_n} \le n$.

Setze $Y_t^{(n)} := Y_t \cdot \mathbf{1}_{\{t\le\tau_n\}}$, $Z_t^{(n)} = Z_t \cdot \mathbf{1}_{\{t\le\tau_n\}}$; diese definieren entsprechend Prozesse $X^{(n)}$ und $\hat{X}^{(n)}$. Dann gilt nach der Lokal.–Eigenschaft (10.29): $X_t^{(n)} = X_{t\wedge\tau_n}$ und $\hat{X}_t^{(n)} = \hat{X}_{t\wedge\tau_n}$, also $\hat{X}_T^{(n)} \le n$ auf C_n f.s.

Wir werden uns jetzt überlegen, daß die Itô–Formel für die durch "$^{(n)}$" indizierten Größen f.s. auf C_n gilt. Wir betrachten dazu das Maß $P' = P[\,\cdot\,|C_n]$, wobei o.E. $P[C_n]>0$ sei. Dann sind die Voraussetzungen (A1) und (A2) auch unter P' erfüllt. Denn ist M Mart, $C\in\mathfrak{F}_0$ mit $P[C]>0$ und $P' := P[\,\cdot\,|C]$, so ist M auch auf $(\Omega,\mathfrak{F},P')$ ein Mart.

Ferner ist die Voraussetzung des beschränkten Falls für $\hat{X}_T^{(n)}$ P'–f.s. erfüllt. Somit gilt die Itô–Formel in der Tat für die durch "$^{(n)}$" indizierten Größen f.s. auf C_n. Wegen $\{\hat{X}_T\le n\} \subset \{\tau_n=T\}\cap C_n$ gilt auf $\{\hat{X}_T\le n\}$ $X_s^{(n)} = X_s$ für $s\le T$ und somit (11.5). Wegen $\Omega = \cup_n \{\hat{X}_T\le n\}$ ist alles gezeigt. □

11.9 Bemerkung. Die Itô–Formel bleibt richtig, wenn man die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial t}f = \dot{f}$ ersetzt durch die folgende Bedingung: Es existiere eine Funktion $\dot{f}(t,x)$ mit $f(t,x)-f(s,x) = {}_s\!\int^t \dot{f}(u,x)\,ds \quad \forall\ s\le t,\ \forall\ x$; dabei sei $\dot{f}(t,\cdot)$ stetig und für $\eta_K(t,\delta) := \max_{x,y\in[-K,K],|x-y|\le\delta} |\dot{f}(t,x)-\dot{f}(t,y)|$ gelte: ${}_0\!\int^t \eta_K(u,\delta)\,du \to 0$ für $\delta\to 0$, $\forall\ K<\infty$, $\forall\ t\ge 0$.

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe. □

11.10 Beispiel. Darstellung von (W_t^2-t).

Wähle X = W, also $X_0 = 0$, $Z \equiv 0$, $Y \equiv 1$, und $f(t,x) = f(x) = x^2$, also $f'(x) = 2x$, $f'' \equiv 2$. Nach der Itō–Formel ergibt sich dann: $f(X_t) = 0 + {}_0\!\int^t \tfrac{1}{2}\cdot 2\,ds + {}_0\!\int^t 2X_s\,dW_s$, d.h.

$W_t^2 = t + 2\cdot {}_0\!\int^t W\,dW$. Also erhält man für das Mart (W_t^2-t) die folgende Darstellung:

(11.11) $\qquad W_t^2 - t = 2\cdot {}_0\!\int^t W\,dW \quad$ oder $\quad dW_t^2 = 2\,W_t\,dW_t + dt$,

wobei sogar $W \in \mathscr{L}^{<2>}$ gilt wegen $E[{}_0\!\int^t W_s^2\,ds] = {}_0\!\int^t E[W_s^2]\,ds = {}_0\!\int^t s\,ds = \tfrac{1}{2}t^2 < \infty$.

Durch den Term dt unterscheidet sich (11.11) von der klassischen Kettenregel. □

11.12 Beispiel. Die Geometrische Brownsche Bewegung.

Sei $(bt+\sigma W_t)$ die Brownsche Bewegung (BB) mit Drift $b\in\mathbb{R}$ und Dispersionskoeffizienten $\sigma>0$. Dann heißt

(11.13a) $\qquad S_t = S_0\cdot\exp\{bt+\sigma W_t\} = S_0\cdot\exp\{\sigma W_t + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\cdot t\}$ mit $\mu=b+\tfrac{1}{2}\sigma^2$,

mit einer reellen $\mathfrak{F}_0$–mb Zva $S_0>0$ **Geometrische BB.** Es gilt offenbar stets $S_t>0$.

Wir schreiben $S_t = \exp\{X_t\} = f(X_t)$ mit $X_t = \log(S_0) + bt + \sigma W_t$. Dies ist ein spezieller Itō–Prozeß mit $Z \equiv \mu$, $Y \equiv \sigma$ und $\dot{f} \equiv 0$, $f' = f'' = f$. Die Itô–Formel liefert nun:

$f(X_t) = f(X_0) + {}_0\int^t \{b \cdot f(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot f(X_s)\}\, ds + {}_0\int^t \sigma \cdot f(X_s)\, dW_s$, d.h.

$S_t = S_0 + (b+\frac{1}{2}\sigma^2) \cdot {}_0\int^t S_s\, ds + \sigma \cdot {}_0\int^t S\, dW$, oder

(11.13b) $\qquad dS_t = S_t \cdot [\mu\, dt + \sigma\, dW_t]$ mit $\mu = b+\frac{1}{2}\sigma^2$.

Ist der Prozeß $\{S_t\}$ ein Modell für den Kurs eines Wertpapieres (Aktie, Dollar), so nennt man $[\mu\, dt + \sigma\, dW_t]$ die zugehörige **Rendite** für das Intervall $[t- dt, t)$.

Es kann also der Fall auftreten, daß $\mu>0$ gilt , was einen Aufwärtstrend und damit eine Instabilität im determistischen Problem $d\xi_t = \mu \cdot \xi_t\, dt$, also $\xi_t = \xi_0 \cdot \exp\{\mu t\}$, bedeutet, daß aber $b = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 < 0$ gilt, was einen Abwärtstrend im stochastischen Problem (11.13a) nach sich zieht. Der Störterm dW kann also eine Stabilisierung mit sich bringen.

Die geometrische BB wird oft zur Beschreibung von Kursschwankungen von Wertpapieren herangezogen, weil einerseits $S_t>0$ und andererseits dS_t proportional zu S_t ist.

Im Fall $\mu = 0$, ist S_t offenbar ein lokales Mart und , wie noch gezeigt wird, sogar ein Mart. Dieser Fall wird jetzt verallgemeinert:

11.14 Beispiel. Der Brownsche Exponentialprozeß.

Sei $Y \in \mathscr{P}^2$, $Z \in \mathscr{P}^1$, $f(t,x) = f(x) = e^x$ und $X_t = {}_0\int^t Z\, d\lambda + {}_0\int^t Y\, dW$ ein Itô–Prozeß,

$$G_t := \exp\{{}_0\int^t Z\, d\lambda + {}_0\int^t Y\, dW\} = f(X_t)$$

Dann gilt $\dot{f} \equiv 0$, $f' = f'' = f$ und somit nach der Itô–Formel:

$$G_t = 1 + {}_0\int^t G \cdot \{Z + \tfrac{1}{2}Y^2\}\, d\lambda + {}_0\int^t G \cdot Y\, dW.$$

Wir fragen jetzt wann G_t ein lokales Martingal ist. Dies ist der Fall, wenn das λ–Integral verschwindet, also wenn $Z := -\frac{1}{2}Y^2$. Diese Definition verträgt sich mit $Z \in \mathscr{P}^1$ wegen $Y \in \mathscr{P}^2$. Dann gilt also:

(11.15a) $\qquad G_t := \exp\{\ {}_0\int^t Y\, dW - \frac{1}{2} \cdot {}_0\int^t Y^2\, d\lambda\ \}$.

(11.15b) $\qquad G_t = 1 + {}_0\int^t G \cdot Y\, dW$ oder $dG_t = Y_t \cdot G_t\, dW_t$.

Wäre $dW_t = \xi_t \cdot dt$ [vgl. den Beginn von §10], so erhielte man als Lösung von (11.15b): $\tilde{G}_t = \exp\{{}_0\int^t Y\, dW\}$. Für das stochastische Integral wird die Rolle von $\tilde{G}$ [oder $\exp\{u \cdot W_t\}$ im Falle $Y \equiv u$] durch G_t [bzw. $\exp\{u \cdot W_t - \frac{1}{2}u^2 t\}$] übernommen.

G ist ein nicht–negatives lokales Mart und somit nach 8.16a ein Supermart. Im Zusammenhang mit der Girsanov–Transformation wird in §12 untersucht, wann G sogar ein Mart ist. Insbesondere wird sich $G^u := (\exp\{u \cdot W_t - \frac{1}{2}u^2 t\}, t \geq 0)$ als ein Mart erweisen. □

11.16 Beispiel. Lineare Gleichungen.

Zunächst soll das folgende Anfangswertproblem in Integralform im Sinne von Carathéodory betrachtet werden [beachte dabei 10.11]:

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \left[B(s)\cdot\xi(s) + \beta(s)\right] ds\ ,\ 0\le t\le T,\ \text{ mit } \int_0^T \left[\,|\beta(s)|+|B(s)|\,\right] ds < \infty\ .$$

Als Lösung erhält man

$$\xi(t) := \varphi(t)\left[\xi(0) + {}_0\!\int^t \frac{\beta(s)}{\varphi(s)}\,ds\right], \text{ wobei } \varphi(t) := \exp\{{}_0\!\int^t B(s)\,ds\}$$

Lösung der homogenen Gleichung $\varphi(t) = 1 + {}_0\!\int^t B(s)\cdot\varphi(s)\,ds$ ist.

Die letzte Aussage läßt sich auch aus der Itô–Formel herleiten. Die erste folgt dann mit Hilfe von Fubini. Jetzt soll diese DGl. mit einem additiven Rauschen betrachtet werden der Form:

(11.17a) $dV_t = [B(t)\cdot V_t + \beta(t)]\,dt + \sigma(t)\,dW_t$ mit ${}_0\!\int^T \sigma^2(t)\,dt < \infty$.

Als Lösung ergibt sich mit der Itô–Formel:

(11.17b) $V_t = \varphi(t)\cdot\left[V_0 + {}_0\!\int^t \frac{\beta(s)}{\varphi(s)}\,ds + {}_0\!\int^t \frac{\sigma(s)}{\varphi(s)}\,dW_s\right] =: \varphi(t)\cdot X_t$.

Dabei ist das stochastische Integral als Mart wohl definiert, da $1/\varphi$ in $[0,T]$ beschränkt ist.

Zum Beweis: X ist ein Itô–Prozeß der Form (11.2) mit: $X_0 := V_0$, $Z_s := \beta(s)/\varphi(s)$ und $Y_s := \sigma(s)/\varphi(s)$.

Offenbar gilt dann: $V_t =: f(t,X_t)$ mit $f(t,x)=\varphi(t)\cdot x$. Aus der Itô–Formel, falls B stetig ist, oder sonst aus 11.9 folgt:

$$V_t = V_0 + {}_0\!\int^t [\dot\varphi(s)\cdot X_s + \varphi(s)\cdot\beta(s)/\varphi(s)]\,ds + {}_0\!\int^t \varphi(s)\cdot\sigma(s)/\varphi(s)\,dW_s$$

$$= V_0 + {}_0\!\int^t [B(s)\cdot V_s + \beta(s)]\,ds + {}_0\!\int^t \sigma(s)\,dW_s. \ \square$$

11.18 Verallgemeinerung von 11.15 und 11.17.

Eine Verallgemeinerung von (11.15b) und (11.17a) ist die stochastische Differentialgleichung

(11.19) $dV_t = [B_t\cdot V_t + b_t]\,dt + [A_t\cdot V_t + a_t]\,dW_t$.

Eine Lösung findet man in Karatzas & Shreve § 5.6, (6.30).

Als Anwendung kann man sich ein Versicherugsunternehmen denken, bei dem V_t den Kapitalstand beschreibt. Das Unternehmen investiert einen Anteil γ in einen Investmentfond mit der Rendite $[\mu\,dt + \sigma\,dW_t]$ (vgl. Bsp. 11.12). Daneben trifft ein Prämienstrom ein mit der Prämienrate c. Zwischen zwei Schadensmeldungen hat man dann also einen Verlauf gemäß

$$dV_t = \gamma\cdot V_t\cdot[\mu\,dt + \sigma\,dW_t] + c\,dt. \ \square$$

§12 Martingal–Charakterisierungen der Brownschen Bewegung, Girsanov–Transformation.

Sei wieder $(\Omega.\mathfrak{F},P)$ mit einer Filterung $\mathbb{F}=\mathbb{F}_+$ vorgegeben und $T \le \infty$.

12.1 Satz. (Lévy). Sei $W \in \mathcal{M}_c^{loc}$ mit $(W_t^2-t, t\ge0) \in \mathcal{M}_c^{loc}$. Dann gilt:

(i) W_t-W_s ist unabhängig von $\mathfrak{F}_s$, $\forall\ 0\le s\le t$;

(ii) $W_t-W_s \sim N(0,t-s)$, $\forall\ 0\le s\le t$;

d.h. $(W,\mathbb{F})$ ist eine 1–dim. standard. B.B. bzgl. $\mathbb{F}$.

12.2 Anmerkung. Durch Verkleinerung von Ω um eine Nullmenge kann erreicht werden, daß W überall stetige Pfade hat. Man nennt einen adaptierten Prozeß W mit [rechtsstetigen und] f.s. stetigen Pfaden sowie mit $W_0=0$ f.s. und den Eigenschaften (i) und (ii) aus 10.1 aber auch eine BB. $\square$

Bew. von 12.1. Nach Def. von $\mathcal{M}_c^{loc}$ gilt $W_0=0$ f.s. Es liegt die Situation von 9.6 vor mit $A_t=t\ \forall t$; also ist: $W \in \mathcal{M}_c^2$ mit Varianzenprozeß A. Also sind die Voraussetzungen von §§ 10.11 an W erfüllt. Als Hilfsmittel verwendet man charakteristische Funktion; dazu wird das stochastische Integral mit komplexwertigen Integranden Y benötigt. Die Def. ergibt sich zwanglos durch eine Aufspaltung in Real– und Imaginärteil gemäß:
$\int Y\,dW := \int \Re(Y)\,dW + i\cdot\int \Im(Y)\,dW$, falls die Integrale auf der rechten Seite erklärt sind.

Wähle nun $f(x) = e^{iux}$ mit $u\in\mathbb{R}$, $i=\sqrt{-1}$; dann gilt: $f'(x) = i\cdot u\cdot(x)$, $f''(x) = -u^2\cdot f(x)$. Mit einer Aufspaltung in Real– und Imaginärteil und der Itô–Formel ergibt sich:

(12.3) $$\exp\{iuW_t\} - \exp\{iuW_s\} = iu\cdot {}_s\!\int^t \exp\{iuW\}\,dW - \tfrac{1}{2}u^2\cdot {}_s\!\int^t \exp\{iuW\}\,d\lambda.$$

Wegen $|f|=1$ sind ${}_0\!\int^{\cdot} \Re(\exp\{iuW\})\,dW$ und ${}_0\!\int^{\cdot} \Im(\exp\{iuW\})\,dW$ Mart'e und man erhält:

$$E_{s,t} := E\left[{}_s\!\int^t \exp\{iuW\}\,dW \mid \mathfrak{F}_s\right] = 0 \text{ f.s.}$$

Sei jetzt s fest. Multipliziert man (12.3) mit $\exp\{-iuW_s\}$. und integriert über $A\in\mathfrak{F}_s$, so folgt:

$\exp\{iu(W_t-W_s)\} - 1 = iu\cdot\exp\{-iuW_s\}\cdot {}_s\!\int^t \exp\{iuW\}\,dW - \tfrac{1}{2}u^2\cdot {}_s\!\int^t \exp\{iu(W_r-W_s)\}\,dr$ und damit

$$\begin{aligned}\varphi(t) - \varphi(s) &:= E\left[\exp\{iu(W_t-W_s)\}\cdot \mathbf{1}_A\right] - P[A]\\ &= iu\cdot E\left[E_{s,t}\cdot\exp\{-iuW_s\}\cdot\mathbf{1}_A\right] - \tfrac{1}{2}u^2\cdot E\left[{}_s\!\int^t \exp\{iu(W_r-W_s)\}\,dr\cdot\mathbf{1}_A\right]\\ &= -\tfrac{1}{2}u^2\cdot {}_s\!\int^t E\left[\exp\{iu(W_r-W_s)\}\cdot\mathbf{1}_A\right]dr = -\tfrac{1}{2}u^2\cdot {}_s\!\int^t \varphi(r)\,dr.\end{aligned}$$

Damit ist φ stetig; daraus folgt hier auch die stetige Differenzierbarkeit.
Also muß $\varphi(t) = \varphi(s)\cdot\exp\{-\tfrac{1}{2}u^2(t-s)\}$ $t\ge s$, gelten, d.h.:

$E\left[\exp\{iu(W_t-W_s)\};A\right] = P[A]\cdot\exp\{-\tfrac{1}{2}u^2(t-s)\}$, wobei $u \mapsto \exp\{-\tfrac{1}{2}u^2(t-s)\}$ die charakterische Funktion zu $N(0,t-s)$ ist.

Für $A=\Omega$ erhält man nun Aussage (ii). Für $P[A]>0$ und $P'[\,\cdot\,]:=P[\,\cdot\mid A]$ ergibt sich:

$E'[\exp\{iu(W_t-W_s)\}] = \exp\{-\frac{1}{2}u^2(t-s)\}$, also $P'[W_t-W_s \in B] = N(0,t-s)[B]$, d.h.

$P[A \cap \{W_t-W_s \in B\}] = P[A] \cdot P[W_t-W_s \in B]$ für $B \in \mathfrak{B}_1$; dies ist Aussage (i). $\square$

Von nun an kann und soll anstelle eines Prozesses W, der die Voraussetzungen von 10.1 erfüllt, gleich eine 1–dim. standard. BB genommen werden.

12.4 Korollar. Sei W ein reeller Prozeß mit [rechtsstetigen und] f.s. stetigen Pfaden sowie $W_0=0$ f.s. , so daß $\forall\ u \in (-1,1)$ der Exponentialprozeß G^u mit $G^u_t = \exp\{uW_t - \frac{1}{2}u^2 \cdot t\}$, $t\geq 0$, ein lokales Mart ist. Dann ist W eine 1–dim. standard. BB.

Die Bedingung von 12.4 ist nach Beispiel 11.14 auch notwendig.

Bew. von 12.4. (i) Eine von u unabhängige Lokalisierungsfolge (τ_n) für G^u erhält man durch

$\tau_n := \inf\{t\geq 0,\ |W_t|>n\}$ [vgl. 8.12]. Es gilt: $0 \leq G^u_{t\wedge\tau_n} \leq e^n$ f.s.

Dann folgt, daß $(G^u_{t\wedge\tau_n}, t\geq 0)$ ein Mart ist [vgl. 8.18 und Übung].

(ii) Es soll nun gezeigt werden, daß $(W_{t\wedge\tau_n}, t\geq 0)$ und $(W^2_{t\wedge\tau_n} - t\wedge\tau_n, t\geq 0)$ Mart'e sind. Die gleichmäßige Integrierbarkeit folgt aus $|W_{t\wedge\tau_n}| \leq n$ f.s., $W^2_{t\wedge\tau_n} \leq n^2$ f.s. Dann folgt aus 12.1 die Behauptung.

Sei dazu $s\geq 0$ und $A \in \mathfrak{F}_s$. Nach (i) ist

$$E[G^u_{t\wedge\tau_n} \cdot \mathbf{1}_A] = E[\exp\{uW_{t\wedge\tau_n} - \tfrac{1}{2}u^2 \cdot t\wedge\tau_n\} \cdot \mathbf{1}_A] \text{ unabhängig von } t\geq s.$$

Die Differentiation nach u, die durch maj. Konvergenz gerechtfertigt ist, ergibt :

(12.5) $$E[(W_{t\wedge\tau_n} - u \cdot t\wedge\tau_n) \cdot G^u_{t\wedge\tau_n} \cdot \mathbf{1}_A] \text{ ist unabhängig von } t\geq s.$$

Eine nochmalige Differentiation liefert:

(12.6) $$E[(\{W_{t\wedge\tau_n} - u \cdot t\wedge\tau_n\}^2 - t\wedge\tau_n) \cdot G^u_{t\wedge\tau_n} \cdot \mathbf{1}_A] \text{ ist unabhängig von } t\geq s.$$

Setzt man nun in (12.5a,b) u=0, so erhält man die gewünschte Martingaleigenschaft:

$$E[W_{t\wedge\tau_n} \cdot \mathbf{1}_A] \text{ und } E[W^2_{t\wedge\tau_n} - t\wedge\tau_n \cdot \mathbf{1}_A] \text{ sind unabhängig von } t\geq s. \ \square$$

12.7 Gronwall–Ungleichung. Seien $0\leq\alpha,\beta,T<\infty$ und $g:[0,T]\mapsto\mathbb{R}$ eine mb beschränkte Funktion mit: $0 \leq g(t) \leq \alpha + \beta \cdot {}_0\!\int^t g(s)\,ds$, $0\leq t\leq T$.

Dann gilt: $g(t) \leq \alpha \cdot e^{\beta t}$, $o\leq t\leq T$, also $g\equiv 0$ im Falle $\alpha=0$.

Bew.: Sei $0 \leq g(t) \leq C_0 < \infty$, $0\leq t\leq T$. Durch Induktion erhält man dann:

$$g(t) \leq \alpha \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\beta t)^m}{m!} + \frac{\beta^k}{(k-1)!} \cdot {}_0\!\int^t g(s)(t-s)^{k-1} ds \leq \alpha \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\beta t)^m}{m!} + \frac{(\beta t)^k}{k!} \cdot C_0 .$$

Für $k\to\infty$ folgt jetzt die Beh. . $\square$

12.8 Satz. Sei Y beschränkter progressiver Prozeß, W 1–dim. standard. B.B. und G der Brownsche Exponentialprozeß zu Y, also: $G_t := \exp\{{}_0\int^t Y\, dW - \frac{1}{2}\cdot {}_0\int^t Y^2\, d\lambda\}$, t≥0.

Dann ist G ein Mart.

Beweis. Sei Y^2 durch K beschränkt. Nach Beispiel 11.14 ist $G = 1 + {}_0\int^{\cdot} G\cdot Y\, dW$, also stets ein lokales Mart. Gemäß 10.24 und (10.27) erhält man eine Lokalisierungsfolge (τ_n) durch:

$\tau_n := n \wedge \inf\{t\geq 0;\ {}_0\int^t G^2\cdot Y^2\, d\lambda > n\}$.

In Hinblick auf 8.17(ii) genügt es jetzt $\sup_n E[G^2_{t\wedge\tau_n}] < \infty\ \forall t$ zu zeigen.

Aus der fundamentalen Isometrie (10.30) erhält man für $\tau=\tau_n$:

$$E[\{{}_0\int^{t\wedge\tau} G\cdot Y\, dW\}^2] = E[{}_0\int^{t\wedge\tau} G^2\cdot Y^2\, d\lambda] \leq n$$

und wegen $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$:

$g(t) := E[G^2_{t\wedge\tau}] \leq E[2\cdot(1 + \{{}_0\int^{t\wedge\tau} G\cdot Y\, dW\}^2)] = 2\cdot(1 + E[{}_0\int^{t\wedge\tau} G^2\cdot Y^2\, d\lambda]) \leq 2\cdot(1+n)$ sowie

$E[G^2_{t\wedge\tau}] \leq 2\cdot(1 + K\cdot E[{}_0\int^{t\wedge\tau} G^2_{s\wedge\tau}\, ds]) \leq 2\cdot(1 + K\cdot E[{}_0\int^t G^2_{s\wedge\tau}\, ds]) = 2 + 2K\cdot {}_0\int^t E[G^2_{s\wedge\tau}]\, ds$.

Für $g(t) = E[G^2_{t\wedge\tau}] \leq 2(1+n)$ gilt also: $g(t) \leq 2 + 2K\cdot {}_0\int^t g(s)\, ds$. Aus 12.7 folgt somit:

$E[G^2_{t\wedge\tau}] \leq 2\cdot e^{2Kt}$. Diese Schranke ist unabhängig von n. [ ]

12.9 Bemerkung (Novikov). Die Aussage von 12.8 bleibt richtig, wenn die Beschränktheit von Y ersetzt wird durch [vgl. Karatzas & Shreve S. 199]

$$E[\exp\{\tfrac{1}{2}\cdot {}_0\int^t Y^2\, d\lambda\}] < \infty,\ \forall\, t\geq 0.\ [\ ]$$

12.10 Satz. (Girsanov). Sei T<∞, W eine 1–dim. standard. BB, Y ein beschränkter progressiver Prozeß und G der Brownsche Exponentialprozeß zu Y, also:

$G_t := \exp\{{}_0\int^t Y\, dW - \frac{1}{2}\cdot {}_0\int^t Y^2\, d\lambda\}$, t≥0. Sei ferner $\tilde{P}$ das W–Maß mit $d\tilde{P} = G_T\, dP$ und $\tilde{W} := (W_t - {}_0\int^t Y\, d\lambda,\ 0\leq t\leq T)$ (BB mit Drift).

Dann ist $(\tilde{W},\mathbb{F})$ unter $\tilde{P}$ eine standard. BB (ohne Drift)..

Bei einer BB mit Drift $- {}_0\int^t Y\, d\lambda$ läßt sich dieser also durch einen Maßwechsel wegtransformieren.

Die Beschränktheit von Y läßt sich wegen 12.9 durch die dortige Bedingung ersetzen.

Wegen $G_T>0$ ist $\tilde{P}$ sogar ein zu P äquivalentes Maß, hat also die gleichen Nullmengen wie P.

Bew. von 12.10. Nach 12.8 ist G ein Mart, somit gilt: $E[G_T] = E[G_0] = 1$. Also ist $\tilde{P}$ ein W–Maß. Nach 12.4 genügt es nun zu zeigen, daß $\tilde{G}^u$ mit $\tilde{G}^u_t = \exp\{u\cdot\tilde{W}_t - \frac{1}{2}u^2 t\}$ unter $\tilde{P}$ ein Mart ist für $|u| < 1$. Zum Beweis dient das folgende

12.11 Lemma. Seien G, $\tilde{P}$ und P wie in 12.10 und M ein reeller stochastischer Prozeß. Dann gilt:
(a) $d\tilde{P}\big|_{\mathfrak{F}_t} = G_t\, dP\big|_{\mathfrak{F}_t}$ [G heißt deshalb auch Dichteprozeß].

(b) Ist ferner $M\cdot G$ Mart unter P , so ist M Mart unter $\tilde{P}$.

Bew. (i) Für t<T und $A\in\mathfrak{F}_t$ gilt: $\tilde{P}[A] = E[G_T\cdot 1_A] = E[G_t\cdot 1_A]$, da G Mart unter P.

(ii) Sei nun $M\cdot G$ Mart unter P, s<t, $A\in\mathfrak{F}_s$. Dann folgt wegen Teil (i) und der Vorauss.:

$\tilde{E}[M_s\cdot 1_A] = E[M_s\cdot G_s\cdot 1_A] = E[M_t\cdot G_t\cdot 1_A] = \tilde{E}[M_t\cdot 1_A]$; also ist M Mart unter $\tilde{P}$. []

Bew. von 12.10 (Fortsetzung). Nach 12.11 genügt es nun z.z., daß $\tilde{G}^u\cdot G_t$ ein Mart unter P ist.

Schreibt man $G=G^Y$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\tilde{G}^u_t\cdot G^Y_t &= \exp\{u\cdot\tilde{W}_t - \tfrac{1}{2}u^2t\}\cdot\exp\{{}_0\!\int^t Y\, dW - \tfrac{1}{2}\cdot{}_0\!\int^t Y^2\, d\lambda\}\\ &= \exp\{u\cdot W_t - u\cdot{}_0\!\int^t Y\, d\lambda - \tfrac{1}{2}u^2t + {}_0\!\int^t Y\, dW - \tfrac{1}{2}\cdot{}_0\!\int^t Y^2\, d\lambda\}\\ &= \exp\{{}_0\!\int^t (Y+u)\, dW - \tfrac{1}{2}\cdot{}_0\!\int^t (Y+u)^2\, d\lambda\} \;=\; G^{Y+u}.\end{aligned}$$

Mit Y ist auch Y+u beschränkter progressiver Prozeß, somit G^{Y+u} nach 12.8 Mart. []

12.12 Korollar. Es liege die Situation von 12.10 vor. Dann gilt:

$${}_0\!\int^t X\, dW = {}_0\!\int^t X\, d\tilde{W} + {}_0\!\int^t X\cdot Y\, d\lambda \;,\ 0\le t\le T,\ \text{f.s. für } X\in\mathscr{L}^2,\ \text{d.h. } dW = d\tilde{W} + Y\, d\lambda.$$

Der Prozeß $X.W = {}_0\!\int^{\cdot} X\, dW$ ist auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ und der Prozeß $X.\tilde{W} = {}_0\!\int^t X\, d\tilde{W}$ ist auf $(\Omega,\mathfrak{F},\tilde{P})$ definiert gemäß §10. Wegen der Äquivalenz von P und $\tilde{P}$ hängen aber die Aussagen "f.s.", "bis auf Nichtunterscheidbarkeit eindeutig" sowie "$X\in\mathscr{L}^2$" nicht von der Wahl von P oder $\tilde{P}$ ab.
Die Gleichung in 12.12 gilt definitionsgemäß, wenn man $\tilde{W}$ als Itô–Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ auffaßt (vgl. 11.4 ff).

Bew. von 12.12. Für $X_t = H_t = \Sigma_{s\in\Pi}\, \xi_{s\_}\cdot \mathbf{1}_{(s\_,s]}(t)\in\mathscr{H}$ gilt:

$(H.\tilde{W})_t = \Sigma_{s\in\Pi}\, \xi_{s\_}\cdot(\tilde{W}_{s\wedge t}-\tilde{W}_{s\_\wedge t}) = \Sigma_{s\in\Pi}\, \xi_{s\_}\cdot(W_{s\wedge t}-W_{s\_\wedge t}) - \Sigma_{s\in\Pi}\, \xi_{s\_}\cdot{}_{s\_\wedge t}\!\int^{s\wedge t} Y\, d\lambda$

$= (H.W)_t - {}_0\!\int^t H\cdot Y\, d\lambda$. Der allgemeine Fall ist nun eine Übungsaufgabe. []

§13 Die Black–Scholes–Formel.

Das folgende Diagramm zeigt Wege zur Berechnung der Black–Scholes– Formel:

$$\begin{array}{ccc} \text{zeitdiskretes Modell} & \longrightarrow & \text{zeitdiskrete Formel} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{zeitstetiges Modell} & \longrightarrow & \text{zeitstetige Formel} \end{array}$$

Mit Hilfe einfacher Arithmetik kann man den Weg vom zeitdiskreten Modell zur zeitdiskreten Binomialformel und dann von der zeitdiskreten Formel zur zeitstetigen Black–Scholes–Formel durch einen Grenzübergang analog zum Beweis des zentralen Grenzwertsatzes gehen. Der Grenzübergang vom zeitdiskreten Modell zum zeitstetigen Modell wird durch das Satz von Donsker (Invarianzprinzip) geliefert.

Hier soll nun das zeitstetige Modell als Basis gewählt werden und in diesem Modell die zeitstetige Formel hergeleitet werden.

Folgende Situation liegt zugrunde. Es bestehen zwei Anlagemöglichkeiten:

(i) Eine risikolose Anlage auf einem Bankkonto, also in ein festverzinsliches Wertpapier (bond) mit der **Zinsrate r.** Wir schreiben:

$$B_t := e^{rt}.$$

Dann beschreibt B_t die Entwicklung von einer Geldeinheit auf dem Bankkonto. Eine Geldeinheit, die man erst in t Zeiteinheiten erhält, hat gegenwärtig einen Wert von e^{-rt}.

Annahme: Das gleiche r gilt auch, wenn Geld geliehen wird. (Modelleinschränkung).

(Zur Vereinfachung kann man sich zunächst r=0 denken.)

(ii) Eine risikobehaftete Anlage in ein kursabhängiges Wertpapier (stock) [z.B. Aktien oder Devisen] mit dem Kurs S_t. Wir stellen uns hier eine Investition in $ vor.

Annahme: Der Prozeß (S_t), der die **Kursentwicklung** beschreibt, ist eine geometrische BB

$$S_t := S_0 \cdot \exp\{\sigma W_t + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t\},\ 0 \le t \le T < \infty, \text{ oder}$$

$$dS_t = S_t \cdot [\mu\, dt + \sigma\, dW_t].$$

Dabei ist $S_0 > 0$ bekannt, W eine 1–dim. standard. BB mit stetigen Pfaden,

$\sigma > 0$ die **Volatilität** und $\mu \in \mathbb{R}$ der **Trendkoeffizient** oder **mittlere Renditenrate**.

Der Term $[\mu\, dt + \sigma\, dW_t]$ beschreibt die Rendite in $[t - dt, t)$, $\mu \cdot S_t\, dt$ beschreibt die Trendprognose und der Term $\mu \cdot S_t\, dW_t$ die Fluktuation.

Die Bank bietet eine (Europäische) (call–) **Option**. Dabei muß der Käufer z.Zt. t=0 einen Preis x_0 zahlen und hat dafür das Recht (aber nicht die Pflicht), zum **Fälligkeitstermin** T c$ (mit $c \geq 0$) für einen festen Wahrnehmungspreis K unabhängig von dem vorliegenden (Dollar–)Kurs S_T zu kaufen.

Dann ist $[c \cdot S_T - K]^+$ der Gewinn des Käufers.

Problem: Was ist ein **fairer Preis** x_0 ?

Klassische Antwort: $x_0 = E[e^{-rT}(c \cdot S_T - K)^+]$.

In der vorliegenden besonderen Situation gibt es eine andere Antwort. Die Bank braucht (im Prinzip) nicht tatenlos abzuwarten, ob der Kurs fällt, was günstig für die Bank ist, oder steigt, was günstig für den Käufer ist. Um den Verlust bei steigendem Kurs abzusichern (hedging), kann die Bank gemäß einer geschickten Strategie selbst Wertpapiere kaufen (in den stock investieren).Hält sie etwa eine positive Anzahl von Dollar, so gewinnt sie bei steigenden Kursen und kann damit den oben beschriebenen Verlust absichern. Sei $\mathbb{F}=(\mathfrak{F}_t, 0\leq t\leq T)$ mit $\mathfrak{F}_t = \sigma(W_s, 0\leq s\leq t)$.

Eine **Strategie** (ein Portfolioplan) der Bank ist ein progressiver Prozeß $(\varphi_1,\varphi_0) = \{(\varphi_{1t},\varphi_{0t}), 0\leq t\leq T\}$ mit geeigneten Integrierbarkeitsbedingungen: $\varphi_1 \cdot S \in \mathscr{L}^2$, $\varphi_0 \cdot B \in \mathscr{L}^1$. Diese Integrierbarkeitsbedingungen werden im folgenden erfüllt sein auf Grund der Stetigkeit der Pfade (vgl. 10.23).

Dabei ist φ_{1t} die Anzahl an $, die z.Zt. t gehalten wird, und $\varphi_{0t}e^{rt}$ der Betrag, der z.Zt. t in Euro gehalten wird. Wir schreiben $\varphi := \varphi_1$.

Dann ist der **Wertprozeß** $X = X^{\varphi}$ gegeben durch:

(13.1)* $\quad X_t = \varphi_{0t} \cdot B_t + \varphi_t \cdot S_t,\ 0\leq t\leq T.$

Die Wahl von φ_0 erlaubt also eine symmetrische Darstellung von X_t in den beiden Anlagemöglichkeiten.

Wir betrachten zunächst den Fall **r = 0** ; dann ist $B_t \equiv 1$ und

(13.1) $\quad X_t = \varphi_{0t} + \varphi_t \cdot S_t,\ 0\leq t\leq T.$

Wir gehen jetzt davon aus, daß die Bank z.Zt. 0 mit dem Kapital $X_0=x_0$ startet, welches sie etwa von dem Käufer als Prämie erhält.

Eine Strategie $(\varphi,\varphi_0) = (\varphi_1,\varphi_0)$ heißt **selbstfinanzierend**, falls gilt:

$$dX_t = \varphi_t\, dS_t \quad \forall t\geq 0,$$

d.h. $(\varphi,\varphi_0) = (\varphi_1,\varphi_0)$ ist selbstfinanzierend, falls sich die Veränderungen bei X_t lediglich aus den Kursänderungen (und dem Zinsgewinn bei $r > 0$) und nicht aus Zuschuß oder Abzug von Kapital ergeben.

Ist $(\varphi,\varphi_0) = (\varphi_1,\varphi_0)$ selbstfinanzierend, so ist X also ein Itô–Prozeß gemäß

(13.2) $$X_t = x_0 + {}_0\!\int^t \varphi_s\, dS_s = x_0 + \sigma \cdot {}_0\!\int^t \varphi_s \cdot S_s\, dW_s + \mu \cdot {}_0\!\int^t \varphi_s \cdot S_s\, ds.$$

Jedes (vorgegebene) φ kann erweitert werden zu einer selbstfinanzierenden Strategie (φ_1,φ_0) gemäß (in Hinblick auf (13.1)):

(13.3) $$\varphi_{0t} := x_0 + {}_0\!\int^t \varphi_s\, dS_s - \varphi_t \cdot S_t\,,\ t \geq 0.$$

Anschaulich bedeutet dies: Man kann immer die Anzahl φ_t von Dollar vorgeben, die man in t halten will. Der nötige Kauf bzw. Verkauf von Dollar wird dann stets durch das Bankkonto ausgeglichen. Also ist bei selbstfinanzierenden Strategien φ_0 durch $\varphi = \varphi_1$ festgelegt.

Gesucht sind nun $x_0 \geq 0$ und φ, so daß gilt:

(13.4**)** $$X_T = x_0 + {}_0\!\int^T \varphi_s\, dS_s = (c \cdot S_T - K)^+ .$$

Zahlt dann der Käufer für die Option die Prämie x_0, so kann die Bank den **Zahlungsanspruch** (**contingent claim**) $(c \cdot S_T - K)^+$ risikolos absichern.

Investiert die Bank nämlich in Euro und \$ gemäß der Strategie φ, die durch (13.2) – (13.4) gegeben ist, so hat sie zusammen mit der Prämie x_0 gerade das Kapital $X_T = (c \cdot S_T - K)^+$ erwirtschaftet.

Definition. Bei Vorliegen von x_0 und φ mit (13.4) wird $\hat{p} = x_0$ als **fairer Preis** für die Option (auf c\$) bezeichnet.

Dieser Preis ist auch aus Sicht des Käufers fair; denn er kann ja ebenfalls mit dem Preis x_0 so investieren, daß er in T den Gewinn $(c \cdot S_T - K)^+$ hat.

Gesucht ist also eine Darstellung (13.4). Wir machen dazu den Ansatz :

(13.5) $$(c \cdot S_T - K)^+ = \left[e^{-rT} \cdot (c \cdot S_T - K)^+ =\right] f(T,S_T) \text{ für ein } f \in C^{1,2}([0,T)\times(0,\infty)) \cap C([0,T]\times(0.\infty)).$$

Dann folgt mit der **Itô–Formel**:

$$f(t,S_t) = f(0,S_0) + {}_0\!\int^t f\,'(s,S_s)\, dS_s + {}_0\!\int^t \left[\dot{f}(s,S_s) + \tfrac{1}{2} f\,''(s,S_s) \cdot \sigma^2 \cdot S_s^{\,2}\right] ds\ ,\ t \leq T.$$

Die Itô–Formel gilt zunächst nur für t<T, aber aus Stetigkeitsgründen auch für t=T.

Kann nun f so gewählt werden, daß $[...]$ verschwindet, so hat man eine Darstellung der Form (13.4) gewonnen. Man betrachtet also das folgende Rückwärts–Cauchy–Problem:

(13.6**)** $$\begin{aligned} &\dot{f}(t,x) + \tfrac{1}{2} f\,''(t,x) \cdot \sigma^2 \cdot x^2 = 0 \ \text{ auf } [0,T)\times(0.\infty) \\ &f(T,x) = (c \cdot x - K)^+\ ,\ f \in C^{1,2}([0,T)\times(0,\infty)) \cap C([0,T]\times(0.\infty)). \end{aligned}$$

Hat man eine Lösung, so setzt man (vgl. (13.2) mit der Itô–Formel):

(13.7**)** $$x_0 := f(0,S_0) \text{ und } \varphi_t := f\,'(t,S_t)\ ,\ \text{somit } X_t = f(t,S_t)\ ,\ t \geq 0.$$

Dann haben φ und damit gemäß (13.2) auch φ_0 stetige Pfade.

Das Problem (13.6) wird weiter unten mit w–theoretischen Methoden gelöst werden.
Hier soll aber zunächst die Lösung direkt angegeben werden:

(13.8) $f(t,x) =$

$$cx\cdot\Phi(\left[\log(cx/K)+\tfrac{1}{2}\sigma^2\cdot(T-t)\right]/\sigma\sqrt{T-t})-K\cdot\Phi(\left[\log(cx/K)-\tfrac{1}{2}\sigma^2\cdot(T-t)\right]/\sigma\sqrt{T-t})\ .$$
$$= cx\cdot\Phi(\log(cx/K)/\sigma\sqrt{T-t}+\tfrac{1}{2}\sigma\cdot\sqrt{T-t})-K\cdot\Phi(\log(cx/K)/\sigma\sqrt{T-t}-\tfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t})\ .$$

Dabei ist Φ die Verteilungsfunktion der N(0,1)–Verteilung.

Man kann nun unmittelbar nachrechnen, daß f eine Lösung des Cauchy–Problems (13.6) ist. Hier soll nur die Stetigkeit in t=T gezeigt werden.

13.9 Lemma. $\lim_{t_n\uparrow T}\lim_{x_n\to x} f(t_n,x_n) = (c\cdot x-K)^+$.

Beweis. (i) Im Fall cx>K ergibt sich: $\lim_{t_n\uparrow T}\lim_{x_n\to x} f(t_n,x_n) = cx\cdot\Phi(+\infty)-K\cdot\Phi(+\infty) = (cx-K)^+$.

(ii) Im Fall cx<K: $\lim_{t_n\uparrow T}\lim_{x_n\to x} f(t_n,x_n) = cx\cdot\Phi(-\infty)-K\cdot\Phi(-\infty) = 0 = (cx-K)^+$.

(iii) Im Fall cx = K zeigen wir:
Zu jeder Folge (t_n,x_n) mit $t_n\uparrow T$, $x_n\to x$ existiert eine $(n')\subset\mathbb{N}$ mit $\lim_{n'} f(t_{n'},x_{n'}) = 0 = (cx-K)^+$. In der Tat existiert wegen der Kompaktheit von $\overline{\mathbb{R}}$ eine Teilfolge $(t_{n'},x_{n'})$ und ein $y\in\overline{\mathbb{R}}$ mit $\log(cx_{n'}/K)/\sigma\sqrt{T-t_{n'}}\to y$. Dann hat man wegen der Stetigkeit von Φ auf $\overline{\mathbb{R}}$:
$\lim_{n'} f(t_{n'},x_{n'}) = cx\cdot\Phi(y)-K\cdot\Phi(y) = 0$. []

Definiert man φ und x_0 gemäß (13.7), so ist $\hat{p} = x_0$ ein fairer Preis für die Option auf c\$. Dabei ist cS_0 gerade der Kurswert von c\$ z.Zt. 0. Meist wird c = 1 gewählt. Man erhält mit $\alpha_\pm = r\pm\frac{1}{2}\sigma^2$:

(13.10) $\hat{p} = x_0 = f(0,S_0) = cS_0\cdot\Phi(d_+/\sigma\sqrt{T})-K\cdot e^{-rT}\cdot\Phi(d_-/\sigma\sqrt{T})$ mit $d_\pm = \log(cS_0/K)+\alpha_\pm\cdot T$.

Dies ist die **Black–Scholes–Formel** (die hier gleich für den allgemeinen Fall $r\geq 0$ formuliert wurde) für die Bewertung der Option. Bemerkenswert ist, daß die Formel nicht vom Trendkoeffizienten μ abhängt! Man kann auch leicht nachrechnen, daß $\hat{p}$ isoton ist der Volatilität σ.

[Die Preisformel ist im gewissen Sinn linear in c. Ist $K = K_c$ der Wahrnehmungspreis und $\hat{p} = \hat{p}_c$ der Black–Scholes–Preis für c Dollar mit $K_c = K_1$; so gilt: $\hat{p}_c = c\cdot\hat{p}_1$. Also ist eine Restriktion auf c = 1 in der Black–Scholes–Formel gerechtfertigt.]

Würde die Bank nicht den fairen Preis für die Option nehmen, so ergäbe sich eine sogenannte **Arbitrage**–Möglichkeit (free lunch). [Arbitrage ≅ Ausnutzung von Preis– oder Kursunterschieden]. Dann herrschte kein Marktgleichgewicht. Würde die Bank etwa einen höheren Preis $p>\hat{p}$ nehmen, so könnte sie $\hat{p}$ zur Absicherung ihres Verlustes nehmen und $p-\hat{p}$ als Gewinn einstreichen.

Der Fall r ≥ 0: Reduktion auf den Fall r = 0.

Der Werteprozeß ist gegeben durch

(13.1)* $\quad X_t = \varphi_{0t} \cdot B_t + \varphi_{1t} \cdot S_t.$

Wir schreiben auch wieder: $\varphi_{1t} = \varphi_t$.

Eine Strategie $(\varphi_t, \varphi_{0t}) = (\varphi_{1t}, \varphi_{0t})$ ist **selbstfinanzierend**, falls gilt:

$$dX_t = \varphi_t\, dS_t + \varphi_{0t}\, dB_t = \varphi_t\, dS_t + \varphi_{0t} \cdot e^{rt}\, r\, dt \quad \forall t \geq 0.$$

Ist $(\varphi_t, \varphi_{0t}) = (\varphi_{1t}, \varphi_{0t})$ selbstfinanzierend, so ist X ein Itô–Prozeß gemäß

(13.2)* $\quad X_t = x_0 + {}_0\!\int^t \varphi_s dS_s + {}_0\!\int^t \varphi_{0s}\, re^{rs} ds = x_0 + \sigma \cdot {}_0\!\int^t \varphi_s \cdot S_s\, dW_s + {}_0\!\int^t [\mu \cdot \varphi_s \cdot S_s + \varphi_{0s}\, r \cdot e^{rs}]\, ds.$

Die Darstellung vereinfacht sich, wenn man den **diskontierten Kurs(Preis)prozeß** und den **diskontierten Wertprozeß** einführt.

Sei dazu $g(t,x) = e^{-rt} \cdot x$ $[$also $\dot g(t,x) = -r \cdot g(t,x)$, $g'(t,x) = e^{-rt}$, $g'' = 0]$ und

$$S_t^r := e^{-rt} \cdot S_t = g(t,S_t) = S_0 \cdot \exp\{\sigma W_t + (\mu - r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t\},$$

$$X_t^r := e^{-rt} \cdot X_t = g(t,X_t) = \varphi_{0t} + \varphi_{1t} \cdot S_t^r \quad \text{(vgl. (13.1))}.$$

Wegen der letzten Beziehung entspricht also der Übergang zum diskontierten Modell formal einem Übergang zu r = 0.

Aus der Itô–Formel folgt:

$$dS_t^r = \dot g(t,S_t)\, dt + g'(t,S_t)\, dS_t = -r \cdot e^{-rt} S_t\, dt + e^{-rt}\, dS_t .$$

$$\begin{aligned} dX_t^r &= \dot g(t,X_t)\, dt + g'(t,X_t)\, dX_t = -r \cdot e^{-rt} X_t\, dt + e^{-rt}\, dX_t \\ &= -r \cdot e^{-rt} [\varphi_{0t} \cdot e^{rt} + \varphi_t \cdot S_t]\, dt + e^{-rt} [\varphi_t\, dS_t + \varphi_{0t}\, r \cdot e^{rt}\, dt] \\ &= \varphi_t \cdot e^{-rt} \cdot [dS_t - r \cdot S_t\, dt] = \varphi_t\, dS_t^r , \end{aligned}$$

also ist die Strategie auch sebstfinanzierend im diskontierten Modell und:

(13.2)** $\quad X_t^r = x_0 + {}_0\!\int^t \varphi_s\, dS_s^r ,\ t \geq 0.$

Diese Darstellung ist wieder analog zum Fall r = 0.

Folgerung : Ist $(\varphi_t, \varphi_{0t}) = (\varphi_{1t}, \varphi_{0t})$ selbstfinanzierend, so ist der abgezinste Wertprozeß (X_t^r) und damit auch der Wertprozeß (X_t) bestimmt durch x_0 und φ.

Jedes (beliebig vorgegebene) φ mit den geeigneten Integrierbarkeitseigenschaften (hier Stetigkeitseigenschaften) kann erweitert weden zu einer selbstfinanzierenden Strategie $(\varphi_t, \varphi_{0t}) = (\varphi_{1t}, \varphi_{0t})$ gemäß

(13.3)* $\quad \varphi_{0t} := x_0 + {}_0\!\int^t \varphi\, dS^r - \varphi_t \cdot e^{-rt} \cdot S_t ,\ t \geq 0 .$

Deswegen spricht man auch von selbstfinanzierenden Strategie φ, die man sich gemäß (13.2) ergänzt denkt.

Diese Form für (φ_{0t}) ist offenbar notwendig; sie ist aber auch hinreichend.

[In der Tat ergibt sich dann mit dem Itô–Prozeß $\tilde{X}_t := x_0 + {}_0\!\int^t \varphi\, dS^r$:

$X_t = \varphi_{0t} \cdot e^{rt} + \varphi_t \cdot S_t = e^{rt} \cdot \tilde{X}_t$. Mit $\tilde{g}(t,x) := e^{rt} \cdot x$ und der Itô–Formel erhält man dann wie oben mit r statt –r:

$dX_t = d\tilde{g}(t,\tilde{X}_t) = re^{rt} \cdot \tilde{X}_t\, dt + e^{rt} \cdot d\tilde{X}_t = r \cdot (\varphi_{0t} \cdot e^{rt} + \varphi_t \cdot S_t)\, dt + e^{rt}\, \varphi_t\, dS_t^r$

$= r \cdot (\varphi_{0t} \cdot e^{rt} + \varphi_t \cdot S_t)\, dt + e^{rt}\, \varphi_t\, (-r \cdot e^{-rt}\, S_t\, dt + e^{-rt}\, dS_t) = r \cdot \varphi_{0t} \cdot e^{rt}\, dt + \varphi_t\, dS_t$.]

Gesucht sind nun $x_0 \geq 0$ und φ, so daß gilt:

(13.4)* $\quad X_T^r = x_0 + {}_0\!\int^T \varphi_t\, dS_t^r = e^{-rT}(c \cdot S_T - K)^+ = (c \cdot S_T^r - e^{-rT} \cdot K)^+$,

$\quad$ d.h. $X_T = (c \cdot S_T - K)^+$.

Zahlt dann der Käufer für die Option $\hat{p} = x_0$ als Prämie, so kann die Bank den Zahlungsanspruch (contingent claim) $(c \cdot S_T - K)^+$ risikolos absichern.

Bei Vorliegen von $x_0 \geq 0$ und φ mit (13.4)* wird x_0 wieder als **fairer Preis** für die Option (auf c$) bezeichnet.

Die Gleichung (13.4)* ist aber die gleiche wie (13.4), wenn man in (13.4) S_t durch S_t^r (d.h. μ durch $\mu - r$) ersetzt sowie K durch

$$K^r := e^{-rT} K.$$

Die Lösung ist also mit :

$f^*(t,x) = cx \cdot \Phi([\log(cx/K^r) + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot (T-t)]/\sigma\sqrt{T-t}) - K^r \cdot \Phi([\log(cx/K^r) - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot (T-t)]/\sigma\sqrt{T-t})$

die Gleichung

(13.7)* $\quad x_0 := f^*(0,S_0)$, $\quad \varphi_t = f^{*\prime}(t,S_t^r)$, $\; X_t^r = f^*(t,S_t^r)$.

Dabei gilt: $x_0 = f^*(0,S_0) = cS_0 \cdot \Phi([\log(cS_0/K) + \log(e^{rT}) + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T]/\sigma\sqrt{T})$

$\quad - K \cdot e^{-rT} \cdot \Phi([\log(cS_0/K) + \log(e^{rT}) - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T)]/\sigma\sqrt{T})$

$= cS_0 \cdot \Phi([\log(cS_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot T]/\sigma\sqrt{T}) - K \cdot e^{-rT} \cdot \Phi([\log(cS_0/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot T)]/\sigma\sqrt{T})$, also

(13.10)* $\quad \hat{p} = x_0 = cS_0 \cdot \Phi(d_+) - K \cdot e^{-rT} \cdot \Phi(d\_)$

mit $\quad d_+ := [\log(cS_0/K) + \alpha_+ \cdot T]/\sigma\sqrt{T}$, $\quad \alpha_\pm = r \pm \frac{1}{2}\sigma^2$,

$\quad d\_ := [\log(cS_0/K) + \alpha\_ \cdot T]/\sigma\sqrt{T}$.

Dies ist gerade die oben für beliebiges $r \geq 0$ angegebene Black–Scholes–Formel.

Bestimmung des Preises $\hat{p}$ mit rein w–theoretischen Mitteln.

Statt von einer Lösung f* in geschlossener Form starten wir jetzt von der folgenden Annahme:

Annahme: f* ist eine Lösung von (13.6) mit K^r statt K , so daß gilt:

$$|f^*(t,x)| \le \alpha + \beta x\ ,\ 0 \le t \le T \quad \text{für gewisse } \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Es gilt: $S_t^r = S_0 \cdot \exp\{\sigma \cdot (W_t + \vartheta \cdot t) - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot t\}$ mit $\vartheta := \frac{\mu - r}{\sigma}$.

Ist $\vartheta = 0$, so ist (S_t^r) als Brownscher Exponentialprozeß ein Mart. Dies kann durch eine Girsanov–Transformation erreicht werden. Dazu setzt man

(13.11) $\quad W_t + \vartheta t =: W_t^*$, also $S_t^r = S_0 \cdot \exp\{\sigma \cdot W_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}$.

Nach Girsanov 12.10 ist W* eine standard Brownsche Bewegung unter P* mit

$$dP^* := Z_T\, dP \quad \text{und} \quad Z_t := \exp\{-\vartheta \cdot W_t - \tfrac{1}{2}\vartheta^2 t\}\ .$$

13.12 Proposition. (a) (S_t^r) ist ein Mart unter P*.

(b) Definiert man $\varphi_t := f^{*\prime}(t, S_t^r)$ und X^r wie in (13.7)*, so ist X^r ein Mart unter P*.

Beweis: a) Wegen 13.11 und 12.8 ist $S_t^r = S_0 \cdot \exp\{\sigma \cdot W_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot t\}$ ein Mart unter P*.

b) (13.11) besagt $dS_t^r = \sigma \cdot S_t^r\, dW_t^*$ (vgl. Beispiele 11.12/14). Aus (13.4)* folgt mit 12.12:

$$dX_t^r = \varphi_t\, dS_t^r = \varphi_t\, \sigma \cdot S_t^r\, dW_t^*\ ,$$

also ist (X_t^r) als stochastisches Integral ein lokales Mart. unter P* und nach (a) auch $\alpha + \beta \cdot S^r \pm X^r = \alpha + \beta \cdot S^r \pm f(\cdot . S^r)$. Nach unserer Annahme ist dieser Prozeß ≥ 0, und somit gemäß Lemma 8.16 auch ein Supermart. Also ist wieder nach (a), $\pm X^r$ eine Supermart. $\square$

Allgemeine Definition. Ein (zu P äquivalentes) W–Maß P*, unter dem der diskontierte Preisprozeß S^r ein Martingal ist, heißt ein (äquivalentes) **Martingalmaß**.

Satz 13.13. $\hat{p} = x_0 = E^*[X_T^r] = E^*[(c \cdot S_T^r - K^r)^+]$ d.h.

$$\hat{p} = cS_0 \cdot \Phi([\log(cS_0/K^r) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \cdot T]/\sigma\sqrt{T}) - K^r \cdot \Phi([\log(cS_0/K^r) - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \cdot T]/\sigma\sqrt{T})$$

$f^*(0, cS_0) =: \hat{p}(T, cS_0, K^r, \sigma)$; dabei ist Φ die Vf zu N(0,1) .

Beweis. Aus 13.12b erhält man: $x_0 = E^*[X_T^r] \overset{(13.4)^*}{=} E^*[(c \cdot S_T^r - K^r)^+]$.

Dabei gilt nach (13.11):

$S_T^r = S_0 \cdot \exp\{\sigma \cdot T^{\frac{1}{2}} \cdot U - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T\}$ mit $U := T^{-\frac{1}{2}} \cdot W_T^* \sim N(0,1)$ unter P*. Mit

$A := \{c\cdot S^r_T - K^r > 0\} = \{U > [\log(K^r/cS_0) + \frac{1}{2}\sigma^2 T]/\sigma\cdot T^{\frac{1}{2}}\} =: \{U > \zeta\}$ folgt:

$x_0 := E^*[(c\cdot S^r_T - K^r)^+] = E^*[(cx_0\cdot\exp\{\sigma\cdot T^{\frac{1}{2}}\cdot U - \frac{1}{2}\sigma^2 T\} - K^r)\cdot \mathbf{1}_A]$

$= cx_0\cdot \int_\zeta^\infty \exp\{\sigma\cdot T^{\frac{1}{2}}\cdot u - \frac{1}{2}\sigma^2 T\}\cdot(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\{-\frac{1}{2}u^2\}\,du - K^r\cdot P^*[A]$

$= cx_0\cdot \int_\zeta^\infty (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\{-\frac{1}{2}(u-\sigma\cdot T^{\frac{1}{2}})^2\}\,du - K^r\cdot P^*[A]$

$= cx_0\cdot \int_{\zeta-\sigma T^{\frac{1}{2}}}^\infty (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\{-\frac{1}{2}y^2\}\,dy - K^r\cdot P^*[Z>\zeta]$

$= cx_0\cdot \int_{-\infty}^{-\zeta+\sigma T^{\frac{1}{2}}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\{-\frac{1}{2}y^2\}\,dy - K^r\cdot P^*[Z<-\zeta]$

$= cx_0\cdot\Phi(-\zeta+\sigma T^{\frac{1}{2}}) - K^r\cdot\Phi(-\zeta)$. □

Andererseits haben wir wegen (13.7)*: $\hat{p}(T,cx,K^r,\sigma) = f^*(0,x)$.

Das legt nahe, daß folgendes gilt:

$f^*(t,x) = \hat{p}(T-t,cx,K^r,\sigma) =$

$= cx\cdot\Phi([\log(cx/K^r) + \frac{1}{2}\sigma^2\cdot(T-t)]/\sigma\sqrt{T-t}) - K^r\cdot\Phi([\log(cx/K^r) - \frac{1}{2}\sigma^2\cdot(T-t)]/\sigma\sqrt{T-t})$.

Dies ist gerade unser f, wenn man K durch K^r ersetzt, somit unser f*, also erhalten wir gerade die Funktion f, die in (13.8) vom Himmel fiel.

Aus $0\le\Phi\le 1$ folgt : $-K^r \le f^*(t,x) \le cx$. Somit erfüllt f die obige Annahme, und Proposition 13.12 und Satz 13.13 gelten.

Damit ergibt sich der **allgemeine Sachverhalt**:

> Der Preis (die Prämie) $\hat{p}$ für den Zahlungsanspruch $C := (c\cdot S_T - K)^+$ im Zeitpunkt 0 ist der Erwartungswert des diskontierten Zahlungsanpruch $C/B_T = (c\cdot S^r_T - K^r)^+$ unter einem äquivalenten Martingalmaß P*, also $\hat{p} = E^*[C/B_T]$.

Zulässige Strategien.

Allgemeine Definition. Eine selbstfinanzierende Strategie φ heißt **zulässig** für das Anfangskapital $x_0\ge 0$, wenn der für den zugehörigen Werteprozeß $X_t = X^\varphi_t$ gilt

(13.14) $\qquad X^\varphi_t \ge 0;\quad 0\le t\le T,$ f.s.

Korollar 13.15. Obige Strategie φ ist zulässig.

Beweis. Nach 13.12b ist der zugehörige diskontierte Werteprozess X^r_t ein Martingal unter P*. Es folgt:

(13.16) $\qquad X^r_t = E[X^r_T|\mathfrak{F}_t] = E[(c\cdot S^r_T - K^r)^+|\mathfrak{F}_t] \ge 0,\ 0\le t\le T.$ □

Eine Charakterisierung $\hat{p} = x_0$ ergibt sich aus:

13.17 Korollar. Sei φ' eine zulässige selbstfinanzierende Strategie und X' der Wertprozeß dazu. Aus der Absicherungseigenschaft: $X'_T \geq C := (cS_T - K)^+$ f.s., folgt: $x_0 \leq x'_0 := X'_0$.

Bew. Da φ' selbstfinanzierend ist, folgt wie im Beweis von 13.12b, daß X'^r ein lokales Mart unter P* ist. Da zudem φ' zulässig ist, ist $X'^r \geq 0$ f.s. und somit nach 8.16a ein Supermart unter P*. Es folgt:

$$x'_0 = E^*[X'^r_0] \geq E^*[X'^r_T] \geq E^*[C/B_T] = x_0. \;[]$$

Der Preis in t.

Aus der Beziehung für die Selbstfinanzierbarkeit $X_t = x_0 + {}_0\int^t \varphi\, dS + {}_0\int^t \varphi_0\, dB$

erhalten wir

$$X_T = X_t + {}_t\int^T \varphi\, dS + {}_t\int^T \varphi_0\, dB = C := (cS_T - K)^+.$$

Somit erhält man in T genau den Zahlungsanspruch C, wenn man in t gerade X_t besitzt und in (t,T) gemäßt der Strategie (φ,φ_0) investiert. Mit den gleichen Argumenten wie vorher ist X_t also ein **fairer Preis für C in t**. Aus 13.12b erhält man dann $X^r_t = E^*[X^t_T | \mathfrak{F}_t]$, also:

(13.18) $$X_t = B_t \cdot E^*[C/B_T | \mathfrak{F}_t].$$

Dies ist eine Verallmeinerung von $x_0 = E^*[C/B_T]$. Denn es kann $\mathfrak{F}_0$ trivial gewählt werden mit $E^*[... | \mathfrak{F}_0] = E^*[...]$.

Δ–Hedge

Nach (13.7)* gilt für die selbst–finanzierende Absicherungsstrategie φ :

(13.19) $$\varphi_t = f^{*\prime}(t,S^r_t) =: \Delta(t) \quad \text{mit } f^*(t,S_t) = X^r_t.$$

Dabei heißt $\Delta(t)$ **Delta** der Option und $\varphi_t = \Delta(t)$ heißt Delta–Absicherungsstrategie (delta–hedge, delta–hedging–rule). In komplizierteren Modellen, in denen μ und σ sowohl von t als auch von der Vorgeschichte bis t abhängen können, ist X_t nicht in geschlossener Form berechenbar. Dann wählt man als Approximation für φ_t

$$\varphi_t \approx \Delta X_t / \Delta S_t,$$

wobei Δ die Änderung über ein kleines Intervall $(t - \Delta t\, ,\, t)$ ist und X_t eventuell eine Approximation für den Preis X_t ist. []

Vollständigkeit.

Wie im Beweis von 13.12a gezeigt, haben wir

$$dX^r_t = \varphi_t \, dS^r_t = \varphi_t \, \sigma \cdot S^r_t \, dW^*_t.$$

Damit erhalten wir für das Mart X^r unter P*

$$E^*[C/B_T|\mathfrak{F}_t] = E^*[X^r_T|\mathfrak{F}_t] = X^r_t = {}_0\!\int^t \varphi \, dS^r = {}_0\!\int^t \varphi \, \sigma \cdot S^r \, dW^*,$$

insbesondere für t = T:

$$C/B_T = {}_0\!\int^T \varphi \, \sigma \cdot S^r \, dW^* = {}_0\!\int^T \varphi \, dS^r.$$

Dies sind Darstellungen des Martingals X^r und der Zva C/B_T als stochastisches Integral und damit Spezialfall des folgenden **Martingal–Darstellungssatz.**

13.20 Martingal–Darstellungssatz

Sei W eine standard Brownsche Bewegung auf $(\Omega,\mathfrak{F}_T,P)$ und $\mathfrak{F}_t := \sigma(W_t, t\geq 0)$.

(a) Ist C eine Zva auf $(\Omega,\mathfrak{F}_T,P)$ mit $E[C^2] < \infty$, so existiert $Y \in \mathscr{L}^{<2>}$ (vgl. 10.1) mit

$$C - E[C] = {}_0\!\int^T Y \, d\, W.$$

(b) Ist $M \in \mathscr{M}^2$ bzgl. $(\mathfrak{F}_t)$ (vgl. 9.1), so existiert $Y \in \mathscr{L}^{<2>}$ mit

$$M_t = {}_0\!\int^t Y \, d\, W.$$

Beweis. vgl. von Weizsäcker / Winkler § 9.7 Beweis von 9.7.4, Karatzas & Shreve Chap. 3, Theorem 4.15 für den Fall, daß die Filterung den "üblichen Bedingungen" (vgl. 1.24) genügt.

Aus (a) folgt (b) mit $M_T = C$, $M_t := E[M_T|\mathfrak{F}_t] = E[{}_0\!\int^T Y \, d\, W|\mathfrak{F}_t] = {}_0\!\int^t Y \, d\, W$.

Umgekehrt folgt (a) aus (b) mit $M_T := C - E[C]$ □

Definition. (a) Ein Zahlungsanspruch C heißt **erreichbar** (attainable, replicable), falls ein Startkapital c_0 und eine selbstfinanzierende Strategie φ existiert mit

$$C = X_T = X^{c_0,\varphi}_T, \text{ d.h. (mit (13.2)**):}$$

$$C^r = C/B_T = c_o + {}_0\!\int^T \varphi \, dS^r.$$

(b) Der Finanzmarkt [hier mit zwei Wertpapieren mit Preisprozessen (B_t) und (S_t)] heißt **vollständig**, falls jeder beschränkte Zahlungsanspruch erreichbar ist, d.h. jeder beschränkter Zahlungsanspruch beschrieben durch eine Zva C kann durch das Startkapital c_0 und die Strategie φ abgesichert werden.

13.21 Satz. Der vorliegende Finanzmarkt ist vollständig.

Beweis: Es ist $\mathfrak{F}_T = \sigma(W_t^*, o \le t \le T)$. Nach Satz 13.20 mit P*, W* statt P, W gilt:

$$C = c_0 + {}_0\int^T Y\, dW^* = c_0 + {}_0\int^T Y\, [\sigma \cdot S^r]^{-1}\, \sigma \cdot S^r\, dW^*$$

$$= c_0 + {}_0\int^T Y\, [\sigma \cdot S^r]^{-1}\, dS^r \text{ gemäß (13.2)**.}$$

Mit $x_0 = c_0$ und $\varphi_t = Y_t\, [\sigma \cdot S_t^r]^{-1}$ folgt die Behauptung. []

13.22 Korollar. In jedem vollständigen Markt existiert höchstens ein Martingalmaß.

Beweisidee: Es ist $C = \mathbf{1}_A = c_0^A + {}_0\int^T \varphi^A\, dS^r$; und es folgt

$$P^*[A] = E^*[\mathbf{1}_A] = E^*[c_0^A + {}_0\int^T \varphi^A\, dS^r] = c_0^A$$

für jede Wahl eines Martingalmaßes P*. Denn ist S^r Martingal unter P*, so auch ${}_0\int^T \varphi\, dS^r$. Also ist $P^*[A]$, $A \in \mathfrak{F}_T$, unabhängig von der speziellen Wahl von P*. []

Arbitrage

Definition. Eine **Arbitragemöglichkeit** ist gegeben, falls ein Startkapital x_0 und eine selbstfinanzierende Strategie φ existieren, so daß für den zugehörigen Wertprozeß X gilt:

(i) $x_0 = 0$, (ii) φ ist zulässig (iii) $P[X_T > 0] > 0$, d.h.

(13.23) (i) $x_0 = 0$, (ii) $X_t^r \ge 0$, $0 \le t \le T$, f.s. , (iii) $P[X_T^r > 0] > 0$.

Arbitragemöglichkeiten führen zu einem instabilen Markt; denn jeder würde sie ausnutzen.

13.24 Satz. Existiert ein äquivalentes Martingalmaß, so existiert keine Arbitragemöglichkeit, d.h. der Markt ist arbitragefrei..

Beweis: Sei (i) $x_0 = 0$, (ii) $X_t^r \ge 0$, $0 \le t \le T$, f.s. Wie im Beweis von 13.12 ist X^r ein lokales Mart unter P* ; damit ist X^r nach Lemma 8.16 ein Supermart. Es folgt:

$x_0 = 0 \ge E[X_T^r]$ bei $X_T^r \ge 0$ f.s., also $X_T^r = 0$ f.s. und (iii) kann nicht gelten. []

Dieser Satz mit seiner Umkehrung bilden einen **Fundamentalsatz.**

Die Äquivalenz der Vollständigkeit des Marktes und die Eindeutigkeit des Martingalmaßes in einem arbitragefreien Markt bildet einen weiteren **Fundamentalsatz.**

Nutzenmaximierung (Anhang)

Bei der Nutzenmaximierung geht es darum, die Strategie so zu wählen, daß der erwartete Nutzen maximal ist. Dazu wird eine konkave isotone Nutzenfunktion U vorgegeben mit

$$U : [0,\infty) \mapsto [-\infty,\infty).$$

Die Konkavität reflektiert einmal, daß eine Steigerung des Kapitals von 1000 auf 1001 als weniger bedeutend angesehen wird als eine Steigerung von 1 auf 2. Zudem ist ein Agent mit einer konkaven Nutzenfunktion **risikoavers**, in dem Sinne daß er bei einem fairen Spiel mit Gewinn X und Einsatz $E[X]$ es vorzieht nicht zu spielen und stattdessen den einsatz zu behalten. Nach der Jensenschen Ungleichung gilt nämlich: $U(E[X]) \geq E[U(X)]$. Hier geht es um die

Maximierung von $E[U(X_T^\varphi)]$

mit einem festen Angangskapital x_0 und selbstfinanzierenden Strategien φ.

Dabei gilt

(13.25) $$dX_t = X_t \cdot \left[r\,dt + \eta_t \cdot (\mu - r)\,dt + \eta_t \cdot \sigma\,dW_t\right] \text{ mit}$$

$\eta_t := \varphi_t \cdot S_t / X_t$ Anteil des Wertes des Dollar–Kontos am Gesamtwert.

Wir werden dabei nur die Fälle $X_t > 0$ betrachten. Zum Beweis von (13.25) hat man nach (13.2)**:

$$dX_t^r = \varphi_t\, dS_t^r = \varphi_t\, [-r \cdot e^{-rt} S_t\, dt + e^{-rt}\, dS_t]$$

$$= \varphi_t\, [-r \cdot e^{-rt} S_t\, dt + e^{-rt} S_t \cdot (\mu\, dt + \sigma\, dW_t)]$$

$$= \varphi_t \cdot S_t\, [-r \cdot e^{-rt}\, dt + e^{-rt} (\mu\, dt + \sigma\, dW_t)],\ t \geq 0$$

und damit für $X_t = e^{rt} \cdot X_t^r$ (vgl. die Stelle zwischen (13.3)* und (13.4)*)

$$dX_t = re^{rt} \cdot X_t^r\, dt + e^{rt}\, dX_t^r = r\, X_t\, dt + \varphi_t \cdot S_t\, [-r\, dt + \mu\, dt + \sigma\, dW_t].$$

Die Beziehung (13.25) kann man auch so schreiben:

(13.26) $$dX_t = (1 - \eta_t) \cdot X_t\, r\, dt + \eta_t \cdot X_t \cdot (\mu\, dt + \sigma\, dW_t).$$

Dabei ist die $r\,dt$ die Rendite des Bankontos, $\mu\, dt + \sigma\, dW_t$ die Rendite des Dollarkontos,

$(1 - \eta_t) \cdot X_t$ der Wert des Bankontos, $\eta_t \cdot X_t$ Wert des Dollarkontos.

Es hat (13.25) die Form $dX_t = X_t \cdot [Z_t + \frac{1}{2} Y_t^2]\, dt + X_t \cdot Y_t\, dW_t$. Eine Lösung ist

$$X_t = x_0 \cdot \exp\{{}_0\!\int^t Z\, d\lambda + {}_0\!\int^t Y\, dW\}, \text{ also}$$

(13.27) $$X_t = x_0 \cdot \exp\{{}_0\!\int^t (r + \eta_s \cdot (\mu - r) - \tfrac{1}{2} \sigma^2 \cdot \eta_s^2)\, ds + {}_0\!\int^t \sigma \cdot \eta_s\, dW_s\}.$$

Unter der Voraussetzung $\eta \in \mathscr{L}^{<2>}$, also

(13.28) $${}_0\!\int^T E[\eta_s^2]\, ds < \infty$$

ist ${}_0\!\int^t \sigma \cdot \eta_s\, dW_s$ ein Martingal und wir haben

(13.29) $$E[{}_0\!\int^t \sigma \cdot \eta_s\, dW_s] = 0 \ , t \geq 0.$$

Die Voraussetzung (13.28) soll jetzt immer an η gemacht werden. Offenbar ist η (neben φ) auch eine mögliche Darstellung einer Strategie, die hier bevorzugt werden soll. Die Nutzenmaximierung soll jetzt für den wichtigen Spezialfall $U(x) = \ln x$ durchgeführt werden. Ohne Einschränkung sei jetzt $x_0 = 1$. Dann ergibt sich aus (13.27), (13.29) :

(13.30) $$E\left[\ln X_T\right] = E\left[\int_0^t (r + \eta_s \cdot (\mu - r) - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2 \cdot \eta_s^2)\,ds\right].$$

Die Maximierung kann hier pfadweise gemacht werden. Es ist

$(r + \eta_s \cdot (\mu - r) - \frac{1}{2}\,\sigma^2 \cdot \eta_s^2) = -\frac{1}{2}\,\sigma^2 \cdot (\eta_s - \frac{\vartheta}{\sigma})^2 + r + \frac{1}{2}\,\vartheta^2$ mit $\vartheta := \frac{\mu - r}{\sigma}$.

Dieser Ausdruck ist maximal für

(13.31) $$\eta_t^* = \frac{\vartheta}{\sigma}\ ,\ 0 \le t \le T.$$

Durch (13.31) wird die Strategie definiert, die den erwarteten Nutzen maximiert. Sie hat hier eine besonders einfache Gestalt: Sie ist nämlich unabhängig von Zeitpunkt und Vorgeschichte.

Definition. $\frac{1}{T}\,E\left[\ln X_T^\eta\right]$ heißt **Wachstumsrate** von η in $[0,T]$.

Für den Spezialfall $\eta_s \equiv 0$ ergibt sich gerade $\frac{1}{t}\ln X_t = r$. Offenbar gilt:

13.32 Satz. (a) Die Strategie η^* in (13.31) maximiert die Wachstumsrate.

(b) Die maximale Wachstumsrate ist $r + \frac{1}{2}\,\vartheta^2$.

(c) Die Wertfunktion unter η^* ist $X_t^* = \exp\{(r + \frac{1}{2}\,\vartheta^2) \cdot t + \vartheta \cdot W_t\}$.

Die Merton–Gerade.

Beschreibt y den Wert des Dollarkontos und z den Wert des Bankkontos unter der Strategie η^*, so gilt die Beziehung $\frac{y}{z+y} = \frac{\vartheta}{\sigma}$. Dies ist eine Gerade in der (y,z)–Ebene und wird als Merton–Gerade bezeichnet. Mit jeder Änderung des Dollar–Kurses ändern sich diese Werte, etwa zu $(\tilde{y},\tilde{z})$. Die Strategie besagt, daß das Portfolio in der folgenden Weise zu (y^*,z^*) umgeschichtet werden muß. Soll diese Umschichtung selbstfinanzierend sein, so muß gelten $y^*+z^* = \tilde{x} := \tilde{y}+\tilde{z}$. Also muß die Umschichtung auf der Geraden $y = -z + \tilde{x}$ erfolgen. Dort wo diese Gerade die Merton–Gerade schneidet, gilt wieder

$$\frac{y^*}{z^*+y^*} = \frac{\vartheta}{\sigma}\,.$$

Das Numeraire–Portfolio.

Sei wieder Z_t die Dichte, die die Girsanov–Transformation von P auf P* beschreibt (vgl. 13.11/ 13.12), also $Z_t = \exp\{-\vartheta \cdot W_t - \frac{1}{2}\vartheta^2 \cdot t\}$.

Dann gilt nach 13.32c

(13.33) $\quad Z_t = e^{rt} / X_t^*$.

Damit erhält man für den fairen Preis einer Zahlungsforderung C gerade

(13.34) $\quad \hat{p} = E^*[C/B_T] = E[Z_T \cdot e^{-rT} \cdot C] = E[C/X_T^*]$.

Dabei kann man $1/X_T^*$ als einen modifizierten Diskontierungsfaktor auffassen. X_T^* ist der Wert in T, wenn man mit $x_0 = 1$ startet und dann gemäß der Strategie η^* investiert. Dagegen ist B_T ist der Wert in T, wenn man mit $x_0 = 1$ startet und dann gemäß der Strategie $\eta = 0$, also immer nur in das Bankkonto investiert. Man sagt, man nimmt im zweiten, klassischen Fall B_t als Numeraire und im ersten Fall X_t^* als **Numeraire**. Dabei heißt die (Portfolio–) Strategie η^* das **Numeraire–Portfolio**. In dem vorliegenden Fall, wo ein Finanzmarkt zur Verfügung steht und nicht das Bankkonto, ist auch eine Diskontierung durch $1/X_T^*$ gerechtfertigt. Das erlaubt die folgende Interpretation von (13.34).

> Anstelle eines Maßwechsel $P \to P^*$, nimm einen Wechsel des Diskontierungsfaktors (Numeraires) $1/B_T \to 1/X_T^*$ vor und berechne den fairen Preis als Erwartungswert unter dem originalen Maß P, das den realen Markt beschreibt, und wähle eine Diskontierung durch das Numeraire–Portfolio.

14 Starke Lösungen stochastischer Differentialgleichungen.

Sei W eine 1–dim. standard. BB auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$, $\mathbb{F}=\mathbb{F}_+$ eine Filterung darauf, $T<\infty$. Eine Erweiterung der Resultate auf den Fall $T=\infty$ ist wie in §10 möglich.

Da der Existenzsatz in diesem §14 umso stärker ist, je kleiner $\mathbb{F}$ ist, kann man gleich $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W_+$ als die kleinste rechtsstetige Filterung wählen, bzgl. der W adaptiert ist.

Es soll die folgende Gleichung studiert werden:

(14.1) $\quad dX_t = b(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dW_t\,,\ t\geq 0,\ X_0=x_0\in\mathbb{R}.$

Def. 1. Sind die Funktionen $b,\sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mb, so heißen sie **Drift**– bzw. **Dispersions–koeffizient**; σ^2 heißt **Diffusionskoeffizient**.

Def. 2. Eine **starke Lösung** von (14.1) mit Startpunkt $x_0\in\mathbb{R}$ ist ein reeller Prozeß $X = X(x_0)$ mit (rechtsstetigen und) f.s. stetigen Pfaden, sodaß gilt:

(14.2) (i) X ist an $\mathbb{F}$ adaptiert;

(ii) $X_0=x_0$ auf Ω;

(iii) ${}_0\int^T \{|b(s,X_s)| + \sigma^2(s,X_s)\}\,ds < \infty$ f.s. ;

(iv) $X_t = X_0 + {}_0\int^t b(s,X_s)\,ds + {}_0\int^t \sigma(s,X_s)\,dW_s\,,\ \forall\, t\geq 0$, f.s. .

Auf Grund von (iii) ist der Prozeß X ein Itô–Prozeß.

14.3 Anmerkung. (14.2)(iii) ist gemäß 10.23 stets erfüllt, wenn b und σ stetig sind.

Beispiel. Für den Fall b und σ konstant sind, ergibt sich die BB $(b\cdot t + \sigma\cdot W_t, t\geq 0)$ mit Drift b und Dispersionskoeffizienten σ gerade als starke Lösung von (14.1).

Beispiel. $X_t = x_0\cdot \exp\{b\cdot t + \sigma\cdot W_t\}$ ist nach dem Beipiel 10.23 starke Lösung von

$dX_t = \mu\cdot X_t\,dt + \sigma\cdot X_t\,dW_t\,,\ t\geq 0.$ mit $b = \mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2$.

Beispiel. Ist ${}_0\int^T [|\beta(s)|+|B(s)|+\sigma^2(s)]\,ds < \infty$, $\varphi(t) := \exp\{{}_0\int^t B(s)ds\}$, so ist nach Beispiel 11.16

$X_t = \varphi(t)[x_0 + {}_0\int^t \beta(s)/\varphi(s)\,ds + {}_0\int^t \sigma(s)/\varphi(s)\,dW_s]$

starke Lösung der linearen stochastischen Dgl.:

$dX_t = [B(t)\cdot X_t+\beta(t)]\,dt + \sigma(t)\,dW_t\,,\ t\geq 0.$

Def. 3. Für die stochastische DGl. (14.1) liegt **starke Eindeutigkeit** vor, wenn für alle $x_0\in\mathbb{R}$ gilt: Sind X und $\tilde{X}$ starke Lösungen von (14.1) mit Start in x_0, so sind X und $\tilde{X}$ nicht unterscheidbar.

Def. 4. b und σ heißen **lokal Lipschitz–stetig in x**, wenn gilt: $\forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\, K=K_n<\infty$ mit:

(14.4) $\quad |b(t,x)-b(t,y)| + |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq K\cdot |x-y|,\ \ \forall\, t\geq 0,\ \forall\, x,y\in[-n,n].$

14.5 Eindeutigkeitssatz. Sind b und σ lokal Lipschitz–stetig in x, so liegt starke Eindeutigkeit vor bei (14.1).

Zum Beweis benötigt man folgende

14.6 Abschätzung. Ist J Itô–Prozeß mit $J_t = {}_0\int^t Z\, d\lambda + {}_0\int^t Y\, dW$, τ Stoppzeit $\le T$, so gilt:

$J_\tau^2 \le L \cdot ({}_0\int^\tau Z^2\, d\lambda + \{{}_0\int^\tau Y\, dW\}^2)$ und

$E[J_\tau^2] \le L \cdot E\left[{}_0\int^\tau (Z^2+Y^2)\, d\lambda\right]$ mit $L:=2(T+1)$.

Bew. Es gilt: $\{{}_0\int^\tau Z\, d\lambda\}^2 \le {}_0\int^\tau 1^2\, d\lambda \cdot {}_0\int^\tau Z^2\, d\lambda \le T \cdot {}_0\int^\tau Z^2\, d\lambda$ [Schwarzsche Ungleichung]. Aus $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ folgt jetzt die erste Ungleichung. Die zweite ergibt sich aus: $E[\{{}_0\int^\tau Y\, dW\}^2] = E[{}_0\int^\tau Y^2\, d\lambda]$ [fundamentale Isometrie 10.16], falls o.E. die rechte Seite endlich ist. $\square$

Bew. von 14.5. Seien X und $\tilde{X}$ starke Lösungen von (14.1) bei Start in x_0.

Setze $\tau_n := T \wedge \inf\{t \ge 0;\ |X_t| + |\tilde{X}_t| > n\}$. Aus

$X_{t\wedge\tau_n} - \tilde{X}_{t\wedge\tau_n} = {}_0\int^{t\wedge\tau_n} \{b(s,X_s) - b(s,\tilde{X}_s)\} ds + {}_0\int^{t\wedge\tau_n} \{\sigma(s,X_s) - \sigma(s,\tilde{X}_s)\}\, dW_s$

folgt mit 14.6 sowie mit K wie in 14.4, wobei $X_{t\wedge\tau_n}, \tilde{X}_{t\wedge\tau_n} \in [-n,n]$ f.s. :

$$g(t) := E[\{X_{t\wedge\tau_n} - \tilde{X}_{t\wedge\tau_n}\}^2] \le L \cdot E[{}_0\int^{t\wedge\tau_n} K^2 \cdot \{X_s - \tilde{X}_s\}^2\, ds]$$

$$\le L \cdot K^2 \cdot E[{}_0\int^t \{X_{s\wedge\tau_n} - \tilde{X}_{s\wedge\tau_n}\}^2\, ds] = L \cdot K^2 \cdot {}_0\int^t g(s)\, ds ,$$

wobei g beschränkt ist wegen $g(t) \le 4n^2$. Aus der Grownwallschen Ungleichung 12.7 ergibt sich nun $g \equiv 0$, also $X_{t\wedge\tau_n} = \tilde{X}_{t\wedge\tau_n}$ f.s. . Für $n\uparrow\infty$ folgt $X_t = \tilde{X}_t$ f.s. wegen $\tau_n = T$ für $n > \max\{|X_t| + |\tilde{X}_t|, 0 \le t \le T\}$. Gemäß 1.1 sind also X und $\tilde{X}$ nicht unterscheidbar. $\square$

Bei den in den obigen Beispielen angegebenen stochastischen DGl'en liegt offenbar starke Eindeutigkeit vor, wenn im Falle der linearen Gleichung B als beschränkt vorausgesetzt wird.

Im deterministischen Fall $\sigma \equiv 0$ wird aus (14.1) die **gewöhnliche Integralgleichung**:

$$x(t) = x_0 + {}_0\int^t b(s,x(s))\, ds ,\ t \ge 0.$$

Lösungen erhält man bekanntlich über die **Picard–Lindelöf–Iteration**:

$$x^{(0)} \equiv x_0 ,\quad x^{(k+1)}(t) = x_0 + {}_0\int^t b(s,x^{(k)}(s))\, ds.$$

Diese Iteration soll auf den stochastischen Fall übertragen werden.

Bereits im deterministischen Fall reicht aber eine lokale Lipschitzbedingung nicht aus, um die Existenz einer globalen Lösung zu sichern, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel. $X_t = (1-t)^{-1}$ ist Lösung von $dX_t = X_t^2\,dt$ mit $X_0=1$ für $T<1$ und nach 14.5 auch die einzige Lösung. Dabei gilt aber $X_t\to\infty$ für $t\to 1$. □

Def. 5: b und σ genügen den **globalen Lipschitz– und linearen Wachstumsbedingungen**, falls: $\exists\, K<\infty$ sodaß für $t\geq 0$. $x,y\in\mathbb{R}$ gilt:

(14.7) $\quad |b(t,x)-b(t,y)| + |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq K\cdot |x-y|$;

(14.8) $\quad |b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K\cdot(1+|x|)\ \left[\ \leq K\cdot\{2(1+x^2)\}^{\frac{1}{2}}\ \right]$.

14.9 Anmerkung. Die Bedingung (11.8) läßt sich abschwächen zu

(14.8)' $\quad \sup_{0\leq t\leq T}\{|b(t,0)|+|\sigma(t,0)|\} < \infty$,

denn aus (14.7) und (14.8)' folgt bereits (14.8) für ein geeignetes K. Im obigen Beispiel gilt natürlich (14.8)', aber nicht (14.7).

14.10 Existenzsatz. Mögen b und σ den globalen Lipschitz–und linearen Wachstums–bedingungen (14.7) und (14.8) genügen. Dann existiert zu jedem Startpunkt $x_0\in\mathbb{R}$ eine starke Lösung X von (14.1) mit $\sup_{t\leq T} E[X_t^2] < \infty$.

Der Beweis wird über die folgende **Iteration** geführt:

(14.11) $\quad X^{(0)}\equiv x_0,\quad X_t^{(k+1)} = x_0 + {}_0\!\int^t b(s,X_s^{(k)})\,ds + {}_0\!\int^t \sigma(s,X_s^{(k)})\,dW_s$, $t\geq 0$.

14.12 Lemma. Seien b,σ wie in 11.10 und $X^{(k)}$ wie in (14.11). Dann gilt für $k\in\mathbb{N}_0$:

(a) $\quad E[\{X_t^{(k)}\}^2] \leq B\cdot(1+x_0^2)\cdot e^{Bt}$, $t\geq 0$, mit $B=B(T,K)$ $[:=2(1+L^2K^2)$ mit $L=2(T+1)]$.

(b) $\quad \{b(t,X_t^{(k)}),t\geq 0\}$ und $\{\sigma(t,X_t^{(k)}),t\geq 0\}\in \mathcal{L}_T^{<2>}$;

Bew. von 14.12. Der Fall k=0 ist klar. Mögen nun (a) und (b) für k gelten.

a) Dann ist $X^{(k+1)}$ insbesondere ein Itô–Prozeß und aus der Abschätzung 14.6 folgt:

$$
\begin{aligned}
E[\{X_t^{(k+1)}\}^2] &\leq 2(x_0^2 + E[\{X_t^{(k+1)}-x_0\}^2])\\
&\leq 2\left[x_0^2 + L\cdot E\left[{}_0\!\int^t b^2(s,X_s^{(k)}) + \sigma^2(s,X_s^{(k)})\,ds\right]\right]\\
&\leq 2\left[x_0^2 + L\cdot {}_0\!\int^t E[2K^2(1+\{X_s^{(k)}\}^2)]\,ds\right]\\
&\leq 2\left[x_0^2 + L\cdot 2K^2\left[t + {}_0\!\int^t B\cdot(1+x_0^2)\cdot e^{Bs}\,ds\right]\right]\\
&\leq 2\left[x_0^2 + 2L\cdot K^2\left[t + (1+x_0^2)\cdot e^{Bt}\right]\right]\\
&\leq 2\left[(1+x_0^2)\cdot e^{Bt} + 2L\cdot K^2\cdot(T+1)\cdot(1+x_0^2)\cdot e^{Bt}\right] = (1+x_0^2)\cdot e^{Bt}\cdot B\,.
\end{aligned}
$$

b) Als Itô–Prozeß ist $X^{(k+1)}$ progressiv. Aus der Meßbarkeit von b und σ folgt leicht, daß $\{b(t,X_t^{(k+1)}),t\geq 0\}$ und $\{\sigma(t,X_t^{(k+1}, t\geq 0\}$ progressiv sind. Ferner gilt:

$$
\begin{aligned}
E\left[{}_0\!\int^T \{b^2(t,X_t^{(k+1)})+\sigma^2(t,X_t^{(k+1)})\}\,dt\right] &= {}_0\!\int^T E[\{b^2(t,X_t^{(k+1)})+\sigma^2(t,X_t^{(k+1)})\}]\,dt\\
&\leq {}_0\!\int^T 2K^2\cdot E[1+\{X_t^{(k+1)}\}^2]\,dt < \infty \quad \text{wegen Teil a).}\ \square
\end{aligned}
$$

Bew. von 14.10. Der Beweis verläuft ähnlich wie der der Vollständigkeit 9.20 von $\mathscr{M}_c^2$.
Es ist $X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)} =: {}_0\!\int^t Z_k \, d\lambda + {}_0\!\int^t Y_k \, dW$ mit
$Z_{k,s} := \{b(s,X_s^{(k)}) - b(s,X_s^{(k-1)})\}$ und $Y_{k,s} := \sigma(s,X_s^{(k)}) - \sigma(s,X^{(k-1)})\}$;
dabei gilt $Z_k, Y_k \in \mathscr{L}_T^{<2>}$.Der Prozeß $\Delta_t^{(k)} := \{X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}\}^2$, $k \geq 0$, ist i.a. kein Quadrat eines Mart's, also i.a. kein Supmart. Er wird aber dominiert durch einen Prozeß $V_k + M_k^2$, der sich als Submart erweisen wird. Aus der Abschätzung 14.6 folgt nämlich:
$\Delta_t^{(k)} \leq 2(T+1)({}_0\!\int^t Z_k^2 \, d\lambda + \{{}_0\!\int^t Y_k \, dW\}^2) =: L \cdot (V_{k,t} + M_{k,t}^2)$, $k \geq 1$, mit $L := 2(T+1)$,
sowie für $g_k(t) := E[V_{k,t} + M_{k,t}^2]$, $k \geq 1$,

$$g_k(t) \leq E[{}_0\!\int^t (Z_k^2 + Y_k^2) \, d\lambda] \leq K^2 \cdot E[{}_0\!\int^t \Delta^{(k-1)} \, d\lambda]$$
$$\leq L \cdot K^2 \cdot E[{}_0\!\int^t (V_{k-1} + M_{k-1}^2) \, d\lambda] = L \cdot K^2 \cdot {}_0\!\int^t g_{k-1}(s) \, ds$$

und $C_1 := \sup_{t \leq T} g_1(t) \leq K^2 \cdot {}_0\!\int^t E[\Delta_s^{(0)}] \, ds < \infty$ nach 14.12a.
Aus dem Beweis der Gronwall–Ungleichung 12.7 folgt nun

$$g_k(t) = E[V_{k,t} + M_{k,t}^2] \leq C_1 \cdot (L \cdot K^2 t)^k / k! \quad \text{für } k \geq 1 \text{, somit } \textstyle\sum_k \sup_{0 \leq t \leq T} E[\Delta_t^{(k)}] < \infty.$$

Wegen $Y_k \in \mathscr{L}_T^{<2>}$ ist M_k ein Mart; ferner hat V_k isotone Pfade. Also sind M_k^2, V_k und somit $V_k + M_k^2$ Submart'e. Mit der Maximal–Ungleichung 8.11 erhält man nun

$$P[\sup_{[0,T]} \Delta^{(k)} > \varepsilon] \leq P[\sup_{[0,T]} (V_k + M_k^2) > \varepsilon / L]$$
$$\leq \frac{L}{\varepsilon} \cdot (E[V_{k,T} + M_{k,T}]) = \frac{2}{\varepsilon} L \cdot g_k(t) \leq \frac{2}{\varepsilon} L \cdot C_1 \cdot (L \cdot K^2 \cdot T)^k / k!.$$

Somit folgt: $\sum_k P[\sup_{[0,T]} \Delta^{(k)} > 2^{-k}] < \infty$. Insgesamt wissen wir also:

(14.13) $\qquad \sum_k \sup_{0 \leq t \leq T} E[\{X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}\}^2] < \infty,$

$\qquad\qquad\quad \sum_k P[\sup_{[0,T]} \{X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}\}^2 > 2^{-k}] < \infty$.

Jetzt folgt wie im Beweis der Vollständigkeit 9.20 von $\mathscr{M}_c^2$ die Existenz eines Prozesses X mit:

(14.14) (a) X ist adaptiert und hat rechtsstetige und f.s. stetige Pfade;

(b) $\sup_{[0,T]} |X - X^{(k)}| \to 0$ f.s. für $k \to \infty$,

(c) $\sup_{t \leq T} E[\{X_t - X_t^{(k)}\}^2] \to 0$ und $\sup_{t \leq T} E[X_t^2] < \infty$.

Damit ist also die Konvergenz des Iterationsverfahren gesichert. Zum Nachweis, daß X auch starke Lösung von (14.1) im Sinne von (14.2) ist, muß gezeigt werden, daß

$$J_t^{(k)} := {}_0\!\int^t b(s,X_s^{(k)}) - b(s,X_s) \, ds + {}_0\!\int^t \sigma(s,X_s^{(k)}) - \sigma(s,X_s) \, dW_s ,$$

also die Differenz der rechten Seiten von (14.11) und 14.2 (iv) gegen Null strebt. Wir zeigen dabei $\mathscr{L}^2$–Konvergenz. Die Differenz der linken Seiten geht ja wegen (14.14)(c) in der $\mathscr{L}^2$–Konvergenz gegen Null. Also folgt dann aus (14.11) die Gleichung 14.2 (iv).

Aus (14.14c) ergibt sich zunächst mit dem linearen Wachstum (14.8):

$$E\left[{}_0\int^T b^2(s,X_s) + \sigma^2(s,X_s)\, ds\right] < \infty.$$

Also ist J_t Itô–Prozeß, und aus der Abschätzung 14.6 sowie der globalen Lipschitzstetigkeit (14.7) folgt:

$$E\left[\{J_t^{(k)}\}^2\right] \le L \cdot {}_0\int^t E\left[\{b(s,X_s^{(k)}) - b(s,X_s)\}^2 + \{\sigma(s,X_s^{(k)}) - \sigma(s,X_s)\}^2\right] ds$$
$$\le L \cdot K^2 \cdot {}_0\int^t E\left[\{X_s^{(k)} - X_s\}^2\right] ds.$$

Wegen (14.14)(c) geht aber der letzte Ausdruck gegen Null. []

Vereinfachter Beweis.

Der Beweis wird übersichtlicher, wenn man sich auf den folgenden wichtigen Spezialfall beschränkt: "$b \equiv 0$".

Deshalb sollen kürzere Beweise für diesen Fall gegeben werden.

Der Beweis der Existenz wird also über die folgende **Iteration** geführt:

(*0) $\quad X^{(0)} \equiv x_0, \quad X_t^{(k+1)} = x_0 + {}_0\int^t \sigma(s,X_s^{(k)})\, dW_s$, $t \ge 0$.

Wir setzen $Y_0 := \sigma(\cdot, x_0)$ und

$$M_t^{(0)} := X_t^{(1)} - X_t^{(0)} =: {}_0\int^t Y_0\, dW.$$

Dann gilt nach der fundamentalen Isometrie und der linearen Wachtumsbedingung:

$$E\left[|M_t^{(0)}|^2\right] = {}_0\int^t \sigma^2(s,x_0)\, ds \le 2 \cdot (1 + x_0^2) \cdot K^2 \cdot t\ ,$$

also insbesondere $Y_0 \in \mathscr{L}^{<2>}$ und $M^{(0)} \in \mathscr{M}_c^2$. Für $k \ge 1$ sei nun

$$M_t^{(k)} := X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)} =: {}_0\int^t Y_k\, dW$$

mit $|Y_k| := |\sigma(\cdot, X^{(k)}) - \sigma(\cdot, X^{(k-1)})| \le K \cdot M^{(k-1)}$ wegen der globalen Lipschitzbedingung.

Mit Induktion zeigen wir nun:

(*1) $\quad E\left[|M_t^{(k)}|^2\right] \le RS_k := 2 \cdot (1 + x_0^2) \cdot \frac{1}{(k+1)!} (K^2 \cdot t)^{k+1}$,

$\quad M^{(k)} \in \mathscr{M}_c^2, \; Y_k \in \mathscr{L}^{<2>}$.

Es ist nach der obigen Beziehung und Induktionsvoraussetzung

$${}_0\int^t E\left[|Y_k|^2\right] d\lambda \le K^2 \cdot {}_0\int^t E\left[|M^{(k-1)}|^2\right] d\lambda$$
$$\le K^2 \cdot 2 \cdot (1 + x_0^2) \cdot \frac{1}{k!} (K^2)^k \cdot \frac{1}{k+1}\, {}_0\int^t (k+1) \cdot s^k\, ds = RS_k.$$

Somit gelten $Y_k \in \mathscr{L}^{<2>}$ und damit $M^{(k)} \in \mathscr{M}_c^2$. Ferner folgt mit der fundamentalen Isometrie:

$$E\left[|M_t^{(k)}|^2\right] = {}_0\int^t E\left[|Y_k|^2\right] d\lambda \le RS_k.$$

Aus der Dreiecksungleichung ergeben sich nun:

$E[\{X_T^{(m)} - X_T^{(n)}\}^2]^{\frac12} \le \sum_{k=n}^{m-1} E[\{X_T^{(k+1)} - X_T^{(k)}\}^2]^{\frac12} = \sum_{k=n}^{m-1} E[|M_T^{(k}|^2]^{\frac12}$

$\le \sum_{k=n}^{m-1} \left\{2\cdot(1+x_0^2)\cdot\frac{1}{(k+1)!}(K^2\cdot T)^{k+1}\right\}^{\frac12}$ also

(*2) $\quad E[\{X_T^{(m)} - X_T^{(n)}\}^2]^{\frac12} \longrightarrow 0$ für $m \ge n \to \infty$.

$E[|X_t^{(n)}|^2]^{\frac12} \le E[|X_t^{(n)} - x_0|^2]^{\frac12} + |x_0|$

$\le \sum_{k=0}^{n-1} E[\{X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}\}^2]^{\frac12} + |x_0| \le \sum_{k=0}^{n-1} \left\{2\cdot(1+x_0^2)\cdot\frac{1}{(k+1)!}(K^2\cdot t)^{k+1}\right\}^{\frac12} + |x_0|$ also

(*3) $\quad E[|X_t^{(n)}|^2]^{\frac12} < \infty$.

Aus der linearen Wachstumsbedingung folgt auch:

(*4) $\quad \sigma(\cdot, X^{(n)}) \in \mathscr{L}^{<2>}$, $X^{(n+1)} \in \mathscr{M}_c^2$, $n \ge 0$.

Aus der Vollständigkeit von $\mathscr{M}_c^2$ (Satz 9.20) folgt nun die Existenz von $X \in \mathscr{M}_c^2$ mit

(*5) $\quad \sup_{t \le T} E[\{X_t^{(n)} - X_t\}^2] \to 0$ für $n \to \infty$.

Zu zeigen bleibt, daß X Lösung ist. Dies ist wegen (*0) der Fall , wenn gezeigt wird:

$$\int_0^t \sigma(s, X_s^{(k)})\, dW_s \to \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s \quad \text{in } \mathscr{M}_c^2 .$$

In der Tat gilt $\sigma(s, X_s) \in \mathscr{L}^{<2>}$ und damit $\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s$ in $\mathscr{M}_c^2$ auf Grund der Wachstumsbedingung; denn wegen $X \in \mathscr{M}_c^2$ ist X^2 ein Submartingal, und wir haben

$$\int_0^T E[\sigma(s, X_s)^2]\, ds \le 2\cdot K^2 \int_0^T E[1 + X_s^2]\, ds \le 2\cdot K^2\cdot T\cdot E[1 + X_T^2] < \infty.$$

Schließlich folgt mit der fundamentalen Isometrie

$E[|\int_0^t \{\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s)\}\, dW_s|^2]$

$$= \int_0^t E[|\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s)|^2]\, ds$$

$$\le K^2 \int_0^t E[|X_s^{(k)} - X_s|^2]\, ds \to 0 \quad , 0 \le t \le T \text{ wegen } (*5).$$

Unter den vorliegenden Bedingungen folgt auch der **Eindeutigkeitssatz** sehr schnell.

Seien X und $\tilde{X}$ Lösungen, also

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s \quad \text{und} \quad \tilde{X}_t = x_0 + \int_0^t \sigma(s, \tilde{X}_s)\, dW_s .$$

Es folgt

$g(t) := E[|\tilde{X}_t - X_t|^2] = E[|\int_0^t \{\sigma(s, \tilde{X}_s) - \sigma(s, X_s)\}\, dW_s|^2]$

$= E[\int_0^t E[|\sigma(s, \tilde{X}_s) - \sigma(s, X_s)|^2]\, ds \le K^2 \int_0^t E[|\tilde{X}_s - X_s|^2]\, ds.$

$= K^2 \int_0^t g(s)\, ds.$

Aus der Grownwallschen Ungleichung 12.7 ergibt sich nun $g \equiv 0$, also $X_t = \tilde{X}_t$ f.s.