Institut für angewandte Mathematik
Wintersemster 2015/16
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

universitätbonn

4. Übungsblatt
„Analysis I"

Abgabe bis Donnerstag 19.11.15 in der Vorlesung

---

1. (Definition von Konvergenz)

In den folgenden Aussagen sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen und x eine rationale Zahl. Sei $C > 0$ Weiterhin seien folgende Aussagen gegeben:

(i)	$\forall k \in \mathbb{N}$	$\exists n_0 \in \mathbb{N}$	$\forall n \geq n_0$	$\lvert a_n - x\rvert < \frac{C}{k}$,
(ii)	$\forall q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$	$\exists n_0 \in \mathbb{N}$	$\forall n \geq n_0$	$\lvert a_n - x\rvert < q^2$,
(iii)	$\forall \varepsilon > 0$	$\exists n_0 \in \mathbb{N}$	$\forall n \geq n_0$	$\lvert a_n - x\rvert \leq \varepsilon$,
(iv)	$\exists n_0 \in \mathbb{N}$	$\forall \varepsilon > 0$	$\forall n \geq n_0$	$\lvert a_n - x\rvert < \varepsilon$,
(v)	$\forall n_0 \in \mathbb{N}$	$\exists\, \varepsilon > 0$	$\forall n \geq n_0$	$\lvert a_n - x\rvert < \varepsilon$.

a) Schreiben Sie die Aussagen (i)-(v) als vollständige Sätze ohne Verwendung von Quantoren.

b) Untersuchen Sie, ob die Aussagen (i)-(v) jeweils dazu äquivalent sind, dass die Folge a gegen x konvergiert. Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

2. (Mittel)

Für strikt positive Zahlen a und b sind das *arithmetische, geometrische* und *harmonische Mittel* definiert durch

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) := \sqrt{ab}, \quad H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}.$$

a) Zeigen Sie, dass
$$H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b)$$
gilt und dass $H(a,b) = G(a,b)$ oder $G(a,b) = A(a,b)$ nur im Fall $a = b$ gelten kann.

b) Es seien $0 < a < b$ und Folgen $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch
$$p_1 := a, \quad q_1 := b, \quad p_n := H(p_{n-1}, q_{n-1}), \quad q_n := A(p_{n-1}, q_{n-1}), \quad n \geq 2.$$
Zeigen Sie, dass

(i) $\forall n \in \mathbb{N}\ p_{n+1} > p_n \geq a$ und $q_{n+1} < q_n < b$.

(ii) p und q Cauchyfolgen sind und $p \sim q$.

(iii) $p_n q_n = ab$ für alle $n \geq 1$.

Zeigen Sie, dass daraus wiederum $\sqrt{ab} = \lim_{n\to\infty} p_n$ folgt.

3. (Äquivalente Cauchy-Folgen)
Sei $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Sei $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Folge natürlicher Zahlen, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ $k_{n+1} > k_n$. Dann nennen wir die Folge y mit Folgengliedern $y_n = x_{k_n}$ eine Teilfolge von x. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Falls x eine Cauchy-Folge ist, so ist jede Teilfolge y von x eine Cauchy-Folge und $x \sim y$.

(b) Wenn $a = (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $c = (x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen sind, so ist auch x eine Cauchy-Folge und $x \sim a \sim b \sim c$.

4. (p-te Wurzel)
Beweisen Sie die folgende Aussage: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{N}$ existiert eine Cauchy-Folge, die gegen die Lösung der Gleichung $x^p = y$ konvergiert. Die Äquivalenzklasse dieser Cauchy-Folge heisst $y^{1/p}$ (oder p-te Wurzel von y, $\sqrt[p]{y}$).

Präsenzaufgaben

Hinweis: Diese Aufgaben werden während der Tutorien in der vierten Vorlesungswoche bearbeitet und dort auch besprochen. Sie werden nicht abgegeben!

5. (Intervallschachtellungsprinzip)
Zeigen Sie, dass aus der Konstruktion der reellen Zahlen folgt, dass jede Intervalschachtellung ein Element enthält.
Definition (Intervallschachtelung): Eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung falls

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $I_n = [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} | a_n \leq x \leq b_n\}$ (abgeschlossene Intervalle).

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $I_{n+1} \subset I_n$.

Gilt dies auch für offene Intervalle, d.h. $I_n = (a_n, b_n) = \{x \in \mathbb{R} | a_n < x < b_n\}$?

6. (Ordnung der reellen Zahlen)
Beweisen Sie:
Die Elemente einer Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen sind entweder alle positiv, alle negativ, oder konvergieren alle gegen 0. Somit gilt für alle reellen Zahlen x entweder $x > 0$, $x < 0$, oder $x = 0$. Es folgt, dass die reellen Zahlen genau wie die rationalen Zahlen geordnet sind, d.h. für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x > y, x < y$, oder $x = y$.