Institut für angewandte Mathematik
Wintersemster 2015/16
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

2. Übungsblatt
„Analysis I"

Abgabe bis Donnerstag 05.11.15 in der Vorlesungspause

---

1. (Peano Axiome)

Konstruieren Sie eine Menge, welche die Peano Axiome (i)-(ii) erfüllt und die natürlichen Zahlen als echte Teilmenge enthält. Beweisen Sie, dass diese Menge tatsächlich die geforderten Eigenschaften hat!

2. (Potenzgesetz)

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Für $x \in R$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $x^0 := 1$, $x^{n+1} := x^n \cdot x$.

a) Beweisen Sie, dass x^n für alle $n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt ist.

b) Beweisen Sie die Potenzregel

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}, \qquad \forall x \in R,\ n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

3. (Vollständige Induktion)

a) Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Fakultät durch $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Zeigen Sie mittels vollständige Induktion, dass

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

c) Vermuten Sie eine Formel für $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$ und beweisen Sie diese induktiv.

4. (Äquivalenzrelation auf Brüchen)

Beweisen Sie, dass sowohl Addition wie Multiplikation kompatibel mit der Äquivalenzrelation $=$ sind, also wenn $\frac{z_1}{n_1} = \frac{z_1'}{n_1'}$ und $\frac{z_2}{n_2} = \frac{z_2'}{n_2'}$, dann sind

$$\frac{z_1}{n_1} + \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1'}{n_1'} + \frac{z_2'}{n_2'},$$

und

$$\frac{z_1}{n_1} \star \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1'}{n_1'} \star \frac{z_2'}{n_2'}.$$

Präsenzaufgaben

Hinweis: Diese Aufgaben werden während der Tutorien in der dritten Vorlesungswoche bearbeitet und dort auch besprochen. Sie werden nicht abgegeben!

5. (Natürliche Zahlen)

Zeigen Sie induktiv, dass die Addition von natürlichen Zahlen kommutativ ist!

6. (Bruchrechnen)

Beweisen Sie:
Addition und Multiplikation von Brüchen sind kommutativ und erfüllen jeweils das Assoziativgesetz sowie das Distributivgesetz.

7. (Folgen)

a) Betrachten sie die Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ mit $a_n = (-1)^n$.

   (i) Veranschaulichen Sie sich die Folge graphisch!

   (ii) Weisen Sie anhand der Definition nach, dass die Folge a beschränkt ist.

   (iii) Beweisen oder widerlegen Sie: a ist eine Cauchyfolge.

b) Betrachten sie die Folge $b : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ mit $b_{2n} = \frac{100}{(2n)^2}$ und $b_{2n+1} = -\frac{100}{(2n+1)^2}$.

   (i) Versnschaulichen Sie sich die Folge graphisch!

   (ii) Weisen Sie anhand der Definition nach, dass die Folge b beschränkt ist.

   (iii) Beweisen oder widerlegen Sie: b ist eine Cauchyfolge.

   (iv) Ist die Folge b konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls anhand der Definition den Grenzwert!