Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2015
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

8. Übungsblatt
,, Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Mittwoch 17.06.15 in der Vorlesungspause

---

1. (Sigma-Regeln)

a) Leiten Sie die in der Abbildung 1 aufgeführten σ-Regeln aus dem Satz von de Moivre-Laplace her.

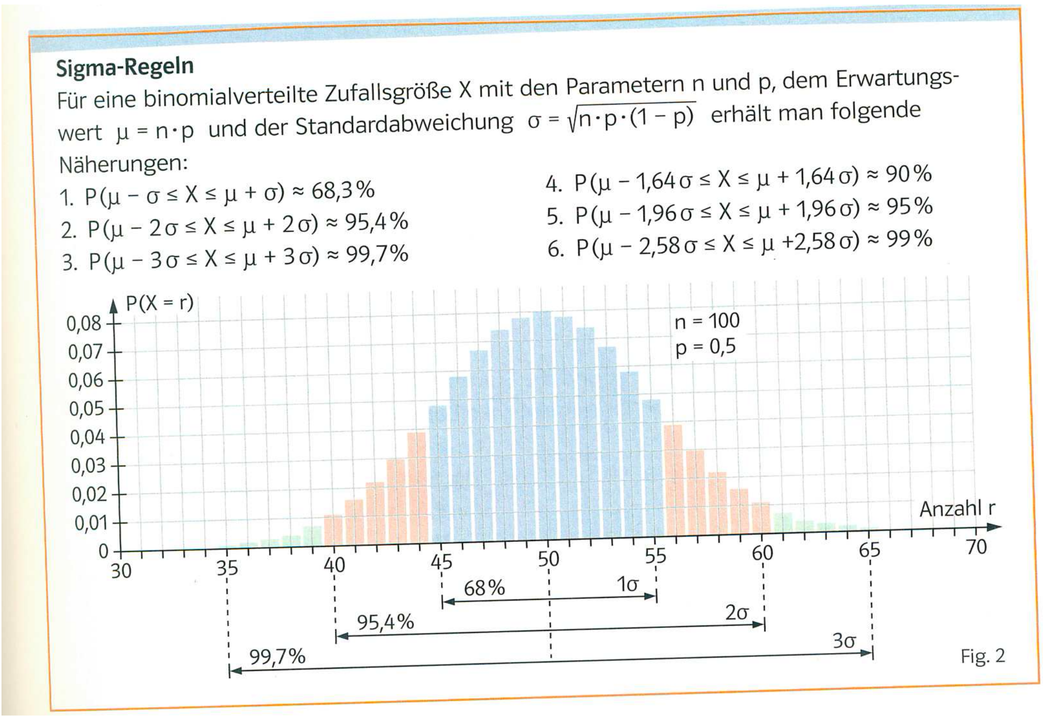

Abbildung 1: Auszug aus dem Lambacher Schweizer

b) Zeigen Sie, dass für $y > 0$ gilt, dass

$$\int_y^\infty e^{-x^2/2}dx \leq \frac{e^{-y^2/2}}{y}. \tag{1}$$

Vergleichen Sie, die in den σ-Regeln verwendeten Abschätzungen mit den, die Sie unter Verwendung von (1), erhalten.

Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Integraltransformation.

2. (Herstellung von Computerchips)
Betrachten Sie das Bespiel entsprechende Beispiel aus der Vorlesung (Seite 65-66 im Skript). Finden Sie eine analoge Schranke für n zu (5.4) im Skript unter Verwendung

a) der Ungleichung: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > u) \leq \frac{\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}X)^4\right]}{u^4}$ für $u > 0$.

b) der exponentiellen Chebychev-Ungleichung aus Aufgabe 4 a), Blatt 3.

Vergleichen Sie die erhaltenen Werte, mit denen aus der Vorlesung für das 2. Moment ((5.4) folgend im Skript) und der Folgerung aus dem Satz von de Moivre-Laplace ((5.16) folgend im Skript).

3. (Satz von de Moivre-Laplace)
Wie im Beweis des Satzes von de Moivre-Laplace sei

$$\begin{aligned} I(p,x) &= \ln\left((x/p)^x[(1-x)/(1-p)]^{1-x}\right) \\ &= x\ln(x/p) + (1-x)\ln((1-x)/(1-p)), \end{aligned}$$

mit $p \in [0,1], x \geq 0$. Zeigen Sie:

(i) $I(p,p) = 0$

(ii) $I(p,x)$ is konvex als Funktion von $x \in (0,1)$ und nimmt ihr einziges Minimum $x = p$ an.

(iii) $\frac{\partial^2 I(p,x)}{\partial x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)} \geq 4$ für $x \in (0,1)$.

4. (Überbuchungen)
Häufig ist die Zahl der zu einem Flug erscheinenden Passagiere geringer als die Zahl der Buchungen für diesen Flug. Die Fluggesellschaft praktiziert daher das sogenannte Überbuchen (d.h. sie verkauft mehr Tickets als Sitze vorhanden sind) mit dem Risiko, eventuell überzählige Passagiere mit Geld entschädigen zu müssen. Angenommen, die Fluggesellschaft hat bei jedem mitfliegenden Fluggast Einnahmen von $a = 300$ Euro, für jede überzählige Person jedoch einen Verlust von $b = 500$ Euro. Wir nehmen ferner an, dass jede Person, die einen Platz gebucht hat, unabhängig von den anderen Passagieren mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,95$ zum Flug erscheint. Wie viele Plätze würden Sie bei einem

(a) Airbus $A319$ mit $s = 124$ Sitzplätzen,

(b) Airbus $A380$ mit $s = 549$ Sitzplätzen

verkaufen, um den zu erwartenden Gewinn zu maximieren?
Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Ist $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen mit Parameter p,$S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, sowie G_n der Gewinn bei n verkauften Plätzen, so gilt

$$G_{n+1} - G_n = a \cdot I_{\{S_n < s\}}\, X_{n+1} - b \cdot I_{\{S_n \geq s\}}\, X_{n+1}$$

Folgern Sie, dass $E[G_{n+1}] \geq E[G_n]$ genau dann gilt, wenn $P[S_n < s] \geq \frac{b}{a+b}$, und verwenden Sie die Normalapproximation der Binomialverteilung.